جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للمناهج

9

الجزء الأول

سلسلة كتب الرياضيات للمرحلة المتوسطة



للصف الثالث المتوسط

المؤلفون

د. أمير عبدالمجيد جاسم	د. طارق شعبان رجب
د. سمير قاسم حسن	د. منير عبدالخالق عزيز
حسين صادق كاظم	زينة عبدالأمير حسين

الطبعة الثانية

١٤٤٠هـ / ٢٠١٩ م

بُنيتْ وصُمِّمَتْ (سلسلةُ كُتُبِ الرّياضيّاتِ للمرحلةِ المتوسطة) على أيــدي فريقٍ من المتخصّصين في وزارةِ التّربيةِ / المديريةُ العامةُ للمناهجِ وبمشاركةِ متخَصّصينَ من أساتذةِ الجامعاتِ في وزارةِ التّعليمِ العالي والبحثِ العلمي على وفقِ المعاييرِ العالميةِ لِتُحقّقَ أهدافَ بناءِ المنهجِ الحديثِ المتمثّلةِ في جعلِ الطّلابِ:

- مُتعلِّميـنَ ناجحيـنَ مـدى الحيـاةِ.
- أفـراداً واثقيـنَ بأنفُسِهـم.
- مواطنينَ عراقيينَ يشعُرونَ بالفخرِ.

المشرفُ العلميُّ على الطّبع
د. أمير عبدالمجيد جاسم
الخَبيرُ اللّغويُّ
علي مصطفى إبراهيم

المشرفُ الفنيُّ على الطّبع
تيسير عبدالإله إبراهيم
مُصمِّمُ الكتاب
تيسير عبدالإله إبراهيم

الغلافُ والرّسومُ الهندسيّةُ
سارة خليل إبراهيم
ياسر منذر محمد سعيد

الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج





المقدمة

تُعَدُّ مادةُ الرياضياتِ مِنَ الموادِ الدراسيةِ الأساسيةِ التي تُساعدُ الطالبَ على اكتسابِ الكفاياتِ التعليميةِ اللازمةِ لهُ، لتنميةِ قُدراتهِ على التفكيرِ وَحلّ المشكلاتِ، ويساعدهُ على التعاملِ مع المواقفِ الحياتيةِ المختلفةِ.

وَمنْ مُنطَلَقِ الاهتمامِ الذي تُوليهِ وزارةُ التربيةِ متمثلةً بالمديريةِ العامةِ للمناهجِ لتطويرِ المناهجِ بصورةٍ عامةٍ ولاسيّما مناهجِ الرياضياتِ لكي تواكبَ التطوراتِ العلميةَ والتكنولوجيةَ في مجالاتِ الحياةِ المختلفةِ، فَقَدْ وُضِعت خطةٌ لتأليفِ سلسلةِ كُتبِ الرياضياتِ للمراحلِ الدراسيةِ الثلاثِ، وأُنجزتْ منها كتبُ المرحلةِ الابتدائيةِ وَبَدأ العملُ على استكمالِ السلسلةِ بتأليفِ كتبِ المرحلةِ المتوسطةِ.

إنّ سلسلةَ كتبِ الرياضياتِ العراقيةِ الجديدةِ ومن ضمن الإطارِ العام للمناهج تُعززُ القيمَ الأساسيةَ التي تتمثلُ بالالتزامِ بالهويةِ العراقيةِ والتسامحِ واحترامِ الرأي والرأي الآخر والعدالةِ الاجتماعية، وتوفيرِ فرصٍ متكافئةٍ للتميزِ والإبداع، كما تعملُ على تعزيزِ كفاياتِ التفكيرِ والتعلّمِ والكفاياتِ الشخصيةِ والاجتماعية وكفاياتِ المواطنةِ والعملِ.

بُنِيَتْ سلسلةُ كتبِ الرياضياتِ العراقيةِ على محوريةِ الطالب في عمليتَي التعليمْ والتعَلُمْ وَعَدهُ المحورَ الرئيسَ في العمليةِ التربويةِ على وفقِ المعاييرِ العالميةِ.

تميزَتْ سلسلةُ كتبِ الرياضياتِ العراقيةِ للمرحلةِ المتوسطةِ في تنظيمِ الدروسِ على ستِ فقراتٍ: تعَلَّمْ ، تأكدْ من فِهمِكَ ، تدرّبْ وَحِلّ التمرينات ، تدرّبْ وحِلّ مسائلَ حياتيةً ، فَكِّرْ ، أُكتبْ.

يأتي كتابُ الرياضياتِ للصفِ الثالث المتوسطِ مشتملاً على أربعة محاور أساسية: محورُ الأعدادِ والعملياتِ ، ومحورُ الجبرِ ، ومحور الهندسة والقياسِ ، ومحورُ الإحصاءِ والاحتمالاتِ من ضِمن الأوزان النسبية لكل محور، وتضَمَّنَ الكتابُ جزأين: الجزء الأول يحتوي على ثلاثة فصولٍ لكل فصلٍ تمريناته، أما الجزء الثاني يحتوي على ثلاثة فصولٍ ولكلِّ فصلٍ تمريناته.

تتميّزُ هذهِ الكتبُ بأنها تعرضُ المادةَ بأساليبَ حديثةٍ، تتوفرُ فيها عناصرُ الجذبِ والتشويقِ، التي تُساعدُ الطالبَ على التفاعلِ معها، عن طريق ما تُقدِمهُ من تدريباتٍ وتمريناتٍ ومسائلَ حياتيةٍ، إضافةً إلى ذلك وُضِعَت تمريناتُ الفصولِ في نهايةِ الكتابِ وهي تخْتلفُ عن التدريباتِ والتمريناتِ في الدروسِ وذلك لكونِها موضوعية فالإجابة عنها تكون عن طريق اختيارٍ من متعدّدٍ وهذا بدورهِ يهيِّئ الطالبَ للمشاركةِ في المسابقاتِ الدوليةِ.

يمثّلُ هذا الكتابُ امتداداً لسلسلةِ كُتبِ الرياضياتِ المطوّرةِ للمرحلةِ الابتدائيةِ ودعامةً من دعائمِ المنهجِ المطوّرِ في الرياضياتِ إلى جانبِ دليلِ المدرّسِ، وعليه نأملُ أنْ يُسْهِمَ تنفيذُها في اكتسابِ الطّلابِ المهاراتِ العلميةِ والعمليةِ وَتنميةِ ميولِهم لدراسةِ الرياضياتِ.

اللّهمّ وفّقْنا لخدمةِ عراقِنا العزيزِ وأبنائِهِ ...

المؤلفون

الفصلُ 1

العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية
Relations and Inequalities in Real Numbers



تتحركُ موجةُ التسونامي في البحار العميقة بسرعة فائقة، لكنها حين تصل إلى الشاطئ تزداد سرعتها تحت تأثير طاقتها الهائلة وتضربُ الشاطئَ بقوةٍ مخلفةً دمار شامل. ويمكن حساب سرعة التسونامي بالقانون $v = \sqrt{9.6d}$ متر في الثانية، حيث d تمثل عمق الماء بالمتر .

Pretest الاختبارُ القبليّ

صنّف العددَ من حيث كونه عدداً نسبياً أو غير نسبيّ:

1. $\sqrt{25}$
2. $\sqrt{7}$
3. $\frac{0}{\sqrt{3}}$
4. $\sqrt{\frac{16}{25}}$
5. $\sqrt{\frac{49}{5}}$
6. $\frac{30}{4}$
7. $-6\frac{3}{2}$
8. $-\sqrt{8}$

قدّر الجذورَ التربيعيةَ التاليةَ بالتقريب لأقربِ عُشرٍ، ثم مثّلها على مستقيمِ الأعداد:

9. $\sqrt{2} \approx$.....
10. $-\sqrt{3} \approx$ .....
11. $\sqrt{\frac{6}{25}} \approx$ .....
12. $\sqrt{\frac{81}{49}} \approx$.....

قارن بين الأعداد الحقيقية مستعملاً الرموز (< ، > ، =):

13. $\sqrt{5}$ ☐ $2\frac{1}{3}$
14. 1.25 ☐ $\sqrt{2.25}$
15. $\sqrt{\frac{0}{3}}$ ☐ $\frac{0}{6}$
16. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ☐ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$

17. رتّب الأعداد من الأصغر إلى الأكبر : $\sqrt{7}$, 2.25 , $\sqrt{5}$
18. رتّب الأعداد من الأكبر إلى الأصغر : $-3\frac{1}{5}$, $-\frac{7}{3}$, -3.33

حلّ المتباينات التالية في R باستعمال خواص المتباينات على الأعداد الحقيقية:

19. $3x + \frac{2}{5} \geq 4x - \frac{3}{5}$
20. $\frac{3}{7} > z - \frac{9}{14}$
21. $\frac{3y}{8} \geq \frac{2}{7}$
22. $\frac{-4m}{11} < \frac{9}{22}$
23. $6(z - 3) > 5(z + 1)$
24. $4\left(\frac{1}{2}v + \frac{3}{8}\right) > 0$

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

25. $\sqrt{2}(1 - \sqrt{18}) =$ ....
26. $3\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$ ....
27. $\frac{\sqrt{7} - 8\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} =$ ....
28. $\frac{6\sqrt{44}}{\sqrt{5}} \div \frac{18\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$

الدرسُ [1-1]

ترتيبُ العملياتِ في الأعدادِ الحقيقيةِ
Ordering Operations in Real Numbers

فكرةُ الدرس

- تبسيط الجمل العددية التي تحتوي على أعداد حقيقية باستعمال ترتيب العمليات.

المفردات

- العددُ الحقيقيُّ
- تنسيبُ (تجذير) المقامِ
- المرافقُ

تعلم

يُعد زلزال تسونامي الذي حدث في اليابان عام 2011 من أقوى الزلازل التي حدثت على مرّ العصور. وتحسب سرعة التسونامي بالقانون $v=\sqrt{9.6d}$ متر بالثانية، حيث d تمثل عمق المياه. ما سرعة التسونامي التقريبية إذا كان عمق المياه 1000 متر؟



[1-1-1] استعمال ترتيب العمليات لتبسيط جمل عددية
Using ordering operations to simplify the numerical sentences

تعرفت سابقاً إلى الأعداد الطبيعية والكلية والصحيحة والنسبية والحقيقية، ويمكن إدراجها بالترتيب بالمخطط الآتي: $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$، وكذلك تعلمت كيفية تبسيط جمل عددية باستعمال ترتيب العمليات على هذه الأعداد، وسوف تزيد مهارتك في تبسيط الجمل العددية التي تحتوي على أعداد حقيقية مختلفة فيها جذور حقيقية وجذور مربعات كاملة وكذلك كسور تحتوي على جذور بتطبيق الخواص عليها مع استعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية وكذلك استعمال تنسيب المقام لتبسيط العبارات وذلك من خلال ضرب مقام الكسر بالعامل المنسب (المرافق) (العدد) $2-\sqrt{3}$ هو العامل المنسب (المرافق) للعدد $2+\sqrt{3}$ لأن حاصل ضربهما عدد نسبي).

مثال (1) جد سرعة التسونامي التقريبية إذا كان عمق المياه 1000 متر.

قانون حساب سرعة التسونامي حيث d تمثل عمق المياه: $v=\sqrt{9.6d}$

سرعة التسونامي التقريبية: $=\sqrt{9.6\times 1000}=\sqrt{9600}\approx 98 \ \text{m/sec}$

مثال (2) بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

باستعمال التوزيع

$$\text{i)}\ (\sqrt{12}-\sqrt{18})(\sqrt{12}+\sqrt{18})=(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$$

$$=2\sqrt{3}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})-3\sqrt{2}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})=12+6\sqrt{6}-6\sqrt{6}-18=-6$$

$$\text{ii)}\ \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\div\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}\right)=\left(\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\div\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\times\frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}=-1$$

مثال (3) بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

$$\text{i)}\ \sqrt{12}(\sqrt{3}-\sqrt{8})-6=2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2\sqrt{2})-6=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}-2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}-6$$

$$=6-4\sqrt{3\times 2}-6=-4\sqrt{6}\approx -4\times 2.4=-9.6$$

$$\text{ii)}\ (-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{1}{9}\sqrt{28}\right)=\sqrt[3]{-27}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{2}{9}\sqrt{7}\right)=-3\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{2}{9}\sqrt{7}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{7}+\frac{2}{3}\sqrt{7}=\frac{1}{3}\sqrt{7}\approx 0.9$$

ملاحظة: $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

مثال (4) بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

$$i)\ \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times 1 = \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\,(7-\sqrt{5})}{\sqrt{5}\,\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}-\sqrt{5}\,\sqrt{5}}{5} = \frac{7\sqrt{5}-5}{5}$$

الضرب بالمرافق

$$ii)\ \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} \times \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{7}\,(2\sqrt{3}+\sqrt{7})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{7})\,(2\sqrt{3}+\sqrt{7})}$$

المقام فرق بين مربعين

$$= \frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{12-7} = \frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{5}$$

[1-1-2] استعمال الحاسبة والتقريب لتبسيط جمل عددية
Using calculator and approximation to simplify the numerical sentences

تعلمت سابقاً كيفية تبسيط جمل عددية تحتوي على قوى (أسس) سالبة صحيحة للعدد وصورة علمية للعدد باستعمال الحاسبة، والآن سوف تزيد مهارتك بتبسيط الجمل العددية التي تحتوي على أعداد مرفوعة إلى قوى (أسس) نسبية إضافةً إلى الأعداد الصحيحة مستعملاً الحاسبة لكتابة الناتج مقرَّباً.

مثال (5) إحسب الأسس لكل مما يلي واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين إذا لم يكن عدداً صحيحاً:

$$i)\ 9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \approx 0.04$$

$$ii)\ (\sqrt{7})^2 = (7^{\frac{1}{2}})^2 = 7$$

$$iii)\ 2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{-3}{2}} = 2^{\frac{10+2-9}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

$$iv)\ 5^2 \div 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{4}{2}-\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2.24$$

اِستعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة لكل مما يأتي:

$$v)\ (\frac{1}{2})^2 + 3^{-2} - 2^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \sqrt{2^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \sqrt{8} \approx 0.25 + 0.11 - 2.83 = -2.47$$

$$iv)\ 8^{\frac{1}{3}} - (-8)^0 + 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + \sqrt{3^5} \approx 2 - 1 + 9 \times 1.73 = 16.57$$

مثال (6) اِستعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

$$i)\ 7.6 \times 10^{-4} - 0.4135 \times 10^{-3} = 7.6 \times 10^{-4} - 4.135 \times 10^{-4} = 3.465 \times 10^{-4} \approx 3.47 \times 10^{-4}$$

$$ii)\ 0.052 \times 10^4 + 7.13 \times 10^2 = 5.2 \times 10^2 + 7.13 \times 10^2 = 12.33 \times 10^2 \approx 1.23 \times 10^3$$

$$iii)\ (7.83 \times 10^{-5})^2 = (7.83 \times 10^{-5})\,(7.83 \times 10^{-5}) = 61.3089 \times 10^{-10} \approx 6.13 \times 10^{-9}$$

$$iv)\ 4.86 \times 10^2 \div 0.55 \times 10^5 = (4.86 \div 0.55) \times 10^2 \times 10^{-5} \approx 8.84 \times 10^{-3}$$

تأكَّدْ من فهمِكَ

بسّط الجمل العددية الآتية:

الأسئلة (1 - 4) مشابهة للمثال (2)

1. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})= ......$
2. $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2= ......$
3. $(\sqrt{125}-\sqrt{20})(\sqrt[3]{\frac{8}{27}})= ......$
4. $\frac{4\sqrt{12}}{5\sqrt[3]{-27}} \div \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{8}}= ......$

بسّطِ الجملَ العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

الأسئلة (5 - 6) مشابهة للمثال (3)

5. $\sqrt{7}(\sqrt{28}-\sqrt{2})-5 \approx ......$
6. $(-125)^{\frac{1}{3}}(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{12}) \approx ......$

بسّطِ الجملَ العدديةَ التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد:

الأسئلة (7 - 9) مشابهة للمثال (4)

7. $\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}= ......$
8. $\frac{1-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}= ......$
9. $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}-\frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}= ......$

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة لكل مما يأتي:

الأسئلة (10 - 11) مشابهة للمثال (5)

10. $(\frac{1}{3})^2+3^{-3}-3^{\frac{3}{2}} \approx ......$
11. $27^{\frac{1}{3}}-(-9)^0+3^2\times 5^{\frac{1}{2}} \approx ......$

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

الأسئلة (12 - 13) مشابهة للمثال (6)

12. $6.43\times 10^{-5}-0.25\times 10^{-3} \approx .....$
13. $(9.23\times 10^{-3})^2 \approx ......$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

بسّط الجمل العددية الآتية:

14. $(\sqrt{18}-\sqrt{50})(\frac{-27}{64})^{\frac{1}{3}}= ......$
15. $\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt[3]{125}} \div \frac{5\sqrt[3]{8}}{\sqrt{25}}= ......$

بسّط الجملة العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

16. $7\sqrt{\frac{2}{49}}-3\sqrt{\frac{8}{81}}+\sqrt{\frac{18}{36}} \approx ......$

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد:

17. $\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}= ......$
18. $\frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{\sqrt{99}}-\frac{\sqrt{60}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}= ......$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



19 **الأقمارُ الاصطناعيةُ:** يستعمل القمرالصناعي بصفة أساسية في الاتصالات مثل إشارات التلفاز والمكالمات الهاتفية في جميع أنحاء العالم والتنبؤ بالطقس وتعقب الأعاصير، إذ تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الأرض، وتحسب سرعة القمر المدارية بالعلاقة التالية: $v=\sqrt{\frac{4\times10^{14}}{r}}$ m/sec ، إذ r نصف قطر المدار (بُعد القمرعن مركز الأرض). ما سرعة القمر إذا كان نصف قطر المدار 300km ؟



20 **مكافحةُ الحرائقِ:** تحسب سرعة تدفق الماء الذي يضخ من سيارات الحريق بالقانون $v = \sqrt{2hg}$ foot/sec ، إذ h تمثل أقصى ارتفاع للماء و g يمثل التعجيل الأرضي (32 foot/sec^2). لإطفاء الحريق في الغابات تحتاج إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني إلى مضخة لتضخ الماء إلى ارتفاع 80 foot. فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة 72 foot/sec ؟

1 foot = 30 cm
وحدة قياس بالنظام الفرنسي



21 **هندسةٌ:** جد مساحة المثلث الذي يعلو واجهة البيت إذا كان ارتفاعه $\sqrt{18} - \sqrt{3}$ m وطول قاعدته $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$ m .

فَكِّرْ

22 **تحدٍّ:** أثبتْ صحة مايأتي:

$$(7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}})\ (7^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}\, 5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}) = 2$$

23 **أُصحِّحُ الخطأ:** كتبَ شاكر ناتجَ جمعِ العددين كالآتي:

$$8.4 \times 10^{-3} + 0.52 \times 10^{-2} = 1.36 \times 10^{-3}$$

حدّد خطأَ شاكر وصحّحهُ .

24 **حسٌّ عدديٌّ:** هل أن العددَ $\sqrt{125}$ يقع بين العددين 10.28 و 11.28 ؟

أُكتبْ

ناتجَ الجمعِ بالتقريبِ لأقربِ عُشر:

$$6^{\frac{3}{2}} + 5^{\frac{3}{2}} \approx .....$$

الدرسُ [1-2] التطبيقات
Mappings

فكرةُ الدرس
- تعرف التطبيق وأنواعه وكيفية تمثيله بيانياً في المستوي الإحداثي وتعرف تركيب التطبيقات.

المفردات
- العلاقة
- الزوج المرتب
- الضرب الديكارتي
- التطبيق
- المجال والمجال المقابل والمدى
- تركيب التطبيقات

تعلم

مجموعة X تمثل بعض المناطق الأثرية في العراق $X = \{$باب عشتار، أور، الحضر$\}$

ولتكن المجموعة Y تمثل بعضَ المدن العراقية $Y = \{$بغداد، الحلة، الناصرية، الموصل، أربيل$\}$

العلاقة $R: X \rightarrow Y$ التي تمثل اقتران كل منطقة أثرية إلى المدينة التي تقع فيها:

$R = \{$(الحضر ، الموصل)، (أور ، الناصرية)، (باب عشتار ، بابل)$\}$ تسمى تطبيق مجاله X ومجاله المقابل Y.



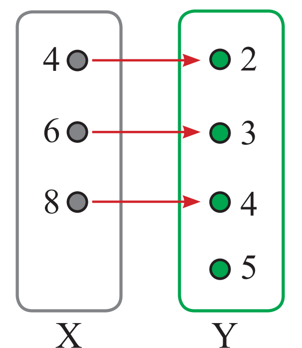
[1-2-1] التطبيق وتمثيله في المستوي الإحداثي
Mapping and its representation in the coordinate plane

تعرفت سابقاً إلى العلاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y وهي المجموعة الجزئية (مجموعة من الأزواج المرتبة (x,y) إذ ينتمي المسقط الأول «الأحداثي الأول» إلى المجموعة X والمسقط الثاني «الإحداثي الثاني» إلى المجموعة Y) من حاصل الضرب الديكارتي X×Y الذي يمثل مجموعة كل الأزواج المرتبة، وسوف تتعرف على التطبيق $R: X \rightarrow Y$ وكيفية تمثيله بمخطط سهمي وتمثيله بالمستوي (بيانياً) والتعرف على أنواعه.

التطبيق: لتكن R علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y وكان لكل عنصر في X صورة واحدة في Y عندئذ تسمى العلاقة R تطبيق من X إلى Y , $R: X \rightarrow Y$ وتسمى المجموعة X بمجال التطبيق (Domain)، والمجموعة Y بالمجال المقابل للتطبيق (Co-domain)، ويسمى كل عنصر في Y مرتبط بعنصر من X صورة لذلك العنصر، وتسمى مجموعة كل الصور في المجال المقابل بالمدى (Range)، وتسمى القاعدة التي تنقل العنصر إلى صورته بقاعدة الاقتران (قاعدة التطبيق) ويرمز لها (x,y) ، R(x) .

مثال (1)

إذا كانت $R: X \rightarrow Y$ تمثل تطبيقاً بقاعدة اقتران $(y = \frac{1}{2}x)$ من المجموعة $X=\{4,6,8\}$ إلى المجموعة $Y=\{2,3,4,5\}$. اكتب التطبيق على شكل مجموعة أزواج مرتبة ثم مثّل التطبيق بمخطط سهمي، وحدّد المجال والمدى للتطبيق .



يوضّح المخطط السهمي علاقة ارتباط عناصر المجموعتين ضمن قاعدة الاقتران $y = R(x) = \frac{1}{2}x$ أي:

$$4 \rightarrow 2 \quad , \quad 6 \rightarrow 3 \quad , \quad 8 \rightarrow 4$$

ولذا مجموعة التطبيق $R = \{(4,2) , (6,3) , (8,4)\}$

المجال: وهومجموعة الإحداثيات الأولى من الأزواج المرتبة في R وهو المجموعة $\{4,6,8\}$

المدى: وهومجموعة الإحداثيات الثانية من الأزواج المرتبة في R ، وهو المجموعة $\{2,3,4\}$

ملاحظة: المدى هو مجموعة جزئية من المجال المقابل للتطبيق

نلاحظ هنا المدى ≠ المجال المقابل

مثال (2) الجدول التالي يمثل العلاقة بين الوزن (كغم) وسعر السمك $(f(x) = y)$.

هل تمثّل العلاقة تطبيقاً ؟

إذا كانت تطبيقاً فاكتب قاعدة الاقتران

وحدِّد المجال والمدى ومثِّله بالمستوي.

X الوزن/كغم	Y السعر بألوف الدنانير
1	2
2	4
3	6
4	8

قاعدة الاقتران $y = 2x$

المجال $\{1,2,3,4\}$, المدى $\{2,4,6,8\}$

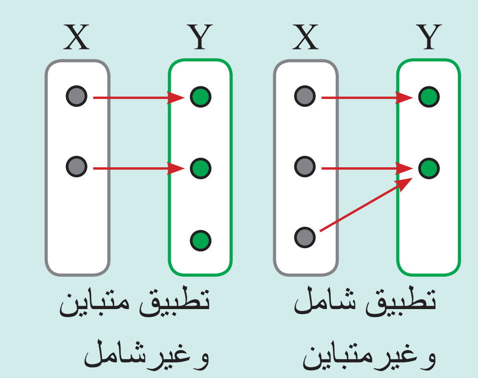
[1-2-2] أنواع التطبيقات

The kind of mappings

يكون التطبيق $f: X \longrightarrow Y$:

i) التطبيق شامل Surjective mapping

إذا كان المدى = المجال المقابل.



تطبيق شامل وغيرمتباين

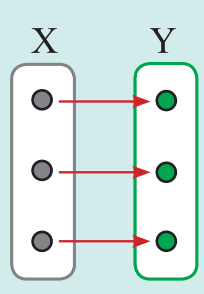
تطبيق متباين وغيرشامل

ii) التطبيق المتباين Injective mapping

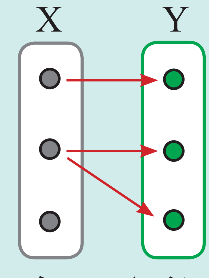
$\forall\ x_1 , x_2 \in X\ ;\ x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

iii) التطبيق تقابل (Bijective mapping)

إذا كان التطبيق شامل ومتباين في آن واحد.



تطبيق تقابل (شامل ومتباين)



علاقة وليست تطبيق

مثال (3) إذا كانت $f: Z \longrightarrow Z$ حيث $f(x) = 2x^2 - 3$ ، بيّن نوع التطبيق حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

$f(x) = 2x^2 - 3\ ,\ f(-2) = 5\ ,\ f(-1) = -1\ ,\ f(0) = -3\ ,\ f(1) = -1\ ,\ f(2) = 5$

أولاً: التطبيق ليس شاملاً لأن المدى لايساوي المجال المقابل.

ثانياً: ليس متبايناً لأن $f(-1) = f(1) = -1$ بينما $-1 \neq 1$.

[1-2-3] تركيب التطبيقات

The composition of mappings

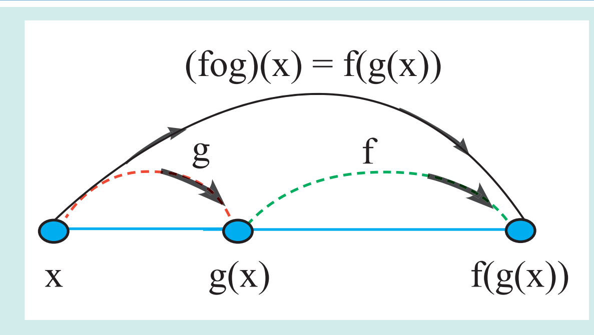
ندرس طريقة لإيجاد تطبيق جديد من تطبيقين معلومين إذ هما $f(x)$ ، $g(x)$ وهي:

i) التطبيق $(fog)(x) = f(g(x))$ ويُقرأ f تركيب g (f بعد g)

وهو ناتج إيجاد $g(x)$ أولاً ثم إيجاد صورته في التطبيق f .

ii) التطبيق $(gof)(x) = g(f(x))$ ويُقرأ g تركيب f

وهو ناتج إيجاد $f(x)$ أولاً ثم إيجاد صورته في التطبيق g .



مثال (4) إذا كان $f(x) = 2x + 1$ ، $f:N \longrightarrow N$ ، $g(x) = x^2$ ، $g:N \longrightarrow N$.

جد: i) $(fog)(3)$ ، ii) $(gof)(3)$، ماذا تلاحظ؟ ، iii) جد قيمة x إذا كان $(fog)(x) = 33$.



ii) $(gof)(3)$ نجد

$(gof)(3) = g(f(3))$

$= g(2 \times 3 + 1)$

$= g(7) = 7^2 = 49$

i) $(fog)(3)$ نجد

$(fog)(3) = f(g(3)) = f(3^2)$

$= f(9) = 2 \times 9 + 1$

$= 19$

لاحظ أن $(fog)(3) \neq (gof)(3)$

iii) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$

$2x^2 + 1 = 33 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ or $x = -4$ يهمل

تأكَّدْ من فهمِكَ

اكتب قاعدة اقتران للتطبيق ومثّله بمخطط سهمي واكتب المجال والمدى له:

الأسئلة (1 - 2) مشابهة للمثال (1)

1 $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$

2 $g = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)\}$

اكتب قاعدة الاقتران للتطبيقات التالية ومثّلها في المستوي الإحداثي واكتب المجال والمدى لها:

الأسئلة (3 - 4) مشابهة للمثال (2)

3 $f = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\}$

4 $g = \{(0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$

السؤال (5) مشابه للمثال (3)

5 إذا كان التطبيق $f: N \longrightarrow N$ إذ إنّ $f(x) = 3x + 2$. بيِّن هل أن التطبيق شامل أم لا؟

الأسئلة (6 - 7) مشابهة للمثال (4)

6 ليكن التطبيقان $f : Z \longrightarrow Z$ حيث $f(x) = 3x + 1$ وأنّ $g : Z \longrightarrow Z$ حيث $g(x) = 2x + 5$.
جد قيمة x إذا كان $(fog)(x) = 28$.

7 إذا كانت $f: N \longrightarrow N$ حيث $f(x) = 5x+2$ وأنّ $g:N \longrightarrow N$ إذ $g(x) = x + 3$.
اكتب التطبيق fog بكتابة الأزواج المرتبة له.

تدربْ وحلّ التمريناتِ

8 إذا كان $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5,6\}$ وأنّ $f: A \longrightarrow B$ معرّف كالآتي:
$f = \{(1,4), (2,5), (3,6)\}$ ، ارسم المخطط السهمي للتطبيق ومثِّله بالمستوي الإحداثي.

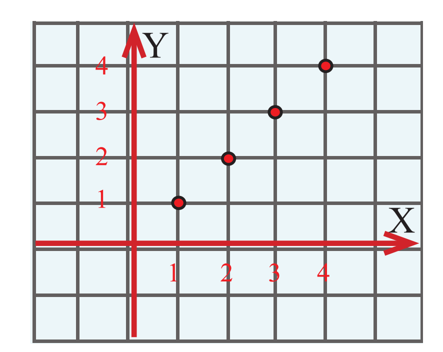
9 إذا كان $f: A \longrightarrow Z$ حيث $f(x) = x^2$ والمجموعة $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ ، مثِّل التطبيق في المستوي الإحداثي وبيّن هل أنه تطبيق متباين أم لا ؟

10 ليكن $f: N \longrightarrow N$ إذ إنّ $f(x) = x^2$, $g: N \longrightarrow N$ إذ $g(x) = x + 1$. والمطلوب إيجاد:

i) $(gof)(x)$, $(fog)(x)$ ، ii) $(fog)(2)$, $(gof)(2)$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

11 **درجات الحرارة:** سجلت درجات الحرارة في أحد أيام الشتاء بالعلاقة التالية $R = \{(6,-2), (9,-3), (12,-4), (15,-5)\}$ إذ يمثل الإحداثي الأول الوقت بالساعة والإحداثي الثاني درجة الحرارة بالدرجات السيليزية. مثّل العلاقة بجدول ومثّلها بالمستوي الإحداثي، هل تمثّل العلاقة تطبيقاً أم لا؟ معللاً إجابتك.



12 **المستوي الإحداثي:** الشكل البياني المجاور يمثل التطبيق $f: N \longrightarrow N$. اكتب إحداثيات الأزواج المرتبة التي تمثّلها نقاط التطبيق في البياني، اكتب قاعدة اقتران التطبيق، هل التطبيق متباين أم لا؟



13 **صحة:** العلاقة $W_r = 2(\frac{W_b}{3})$ تمثل وزنَ الماء في جسم الإنسان، و W_b تمثل وزنَ الإنسان. وزن حسان 150kg، استعملَ نظام خاص بإنقاص الوزن لمدة ثلاثة أشهر ففقدَ من وزنه 6kg في الشهرالأول ثم 12kg في الشهر الثاني، 12kg في الشهر الثالث. اكتب جمع الأزواج المرتبة للعلاقة بين وزن حسان ووزن الماء في جسمه، هل تمثّل تطبيقاً أم لا ؟

فَكِّرْ

14 **تحدٍّ:** إذا كان $A=\{1 ,2 ,3\}$ وكان $f: A \longrightarrow A$ و $g: A \longrightarrow A$ معرّفان كما يلي:

$$f = \{(1,3) , (3,3) , (2,3)\} \quad , \quad g = \{(3,1) , (1,2) , (2,3)\}$$

بيِّن هل أن $fog = gof$ ؟

15 **أُصحِّحُ الخطأ:** قال ياسين إن العلاقة $f: Z \longrightarrow Z$ حيث $f(x)= x^3$ لا تمثّل تطبيقاً متبايناً. حدّد خطأ ياسين وصحّحهُ.

16 **حسٌّ عدديٌّ:** حدّد ما إذا كانت كل علاقة $f: X \longrightarrow Y$ فيما يلي تمثل تطبيقاً أم لا؟ فسِّر ذلك.

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

أُكتبْ

قيمة x إذا كان $f: N \longrightarrow N$ يمثل تطبيقاً حيث $f(x) = 4x - 3$ ، وأنّ $(fof)(x) = 33$.

الدرسُ [1-3] المتتابعات
The Sequences

فكرةُ الدرس
- التعرف إلى المتتابعة والمتتابعة الحسابية وخواصها

المفردات
- المتتابعة
- المتتابعة الحسابية
- الحد العام
- المتتابعة الثابتة
- أساس المتتابعة

تعلم

يعمل بشار في المرسم خمسة أيام في الأسبوع وينتج لوحةً فنيةً كلَّ ثلاثة أيام. نظّمْ جدولاً يربط بين عدد الأيام وعدد اللوحات التي رسمها بشار إذا عمل 4 أسابيع في المرسم. اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتالية؟



[1-3-1] المتتابعة والدالة
The sequence and function

تعرفت سابقاً إلى الدالة وكيفية تحديد مجالها ومداها والآن سوف تتعرف إلى المتتابعة كدالة وكيفية التعبير عنها وكتابة حدودها وكما يأتي: إن المتتابعة $f{:}N \longrightarrow R$ (Sequence) هي دالة تمثلها مجموعة الأزواج المرتبة $\{(1,f(1)) , (2,f(2)) , (3,f(3)) , \dots ,(n,f(n)), \dots\}$ إذ إنّ المساقط الأولى هي مجموعة الأعداد الطبيعية (متتابعة غير منتهية infinite sequence ويرمز لها $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ أو $(\{u_n\}_{n=1}^{\infty})$ أو مجموعة جزئية منها (متتابعة منتهية finite sequence ويرمز لها $\{f(n)\}_{n=1}^{m}$ أو $(\{u_n\}_{n=1}^{m})$، ولذا اكتُفيَ بكتابة المساقط الثانية (الصور) $\{((f(1)) , (f(2)) , (f(3)) ,\dots, (f(n) ,\dots\}$ ويسمى u_n بالحد العام للمتتابعة وأن $u_n = f(n)$.
والمتتالية تكتب $\{u_1 ,u_2 ,u_3 ,u_4 ,\dots ,u_i ,\dots\}$، أو $u_1 ,u_2 ,u_3 ,u_4 ,\dots ,u_i ,\dots$.

مثال (1) نظّم جدولاً يربط بين عدد الأيام وعدد اللوحات. اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتابعة؟

عدد اللوحات	1	2	3	4	5	6
عدد الأيام	3	6	9	12	15	18

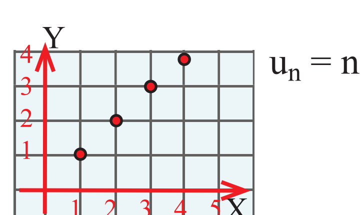
الأزواج المرتبة $\{(1,3),(2,6),(3,9),(4,12),(5,15),(6,18)\}$

نعم يمثل نمطاً والعلاقة تمثل "ثلاثة أمثال" والعلاقة تمثل متتابعة حدّها العام هو
$u_n = 3n \, , \, n \in \{1,2,3,4,5,6\}$ ، وتكتب بالشكل الآتي: $\{u_n\} = \{3n\} = \{3,6,9,12,15,18\}$

مثال (2) اكتب الأزواج المرتبة الخمسة الأولى للمتتابعة $\{u_n\}$ ومثّلها في المستوي الإحداثي:

i) $\{n\}= \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

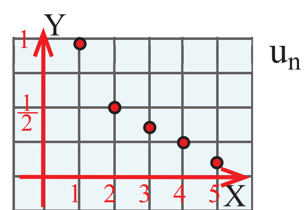
$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) \}$



$u_n = n$

ii) $\{\frac{1}{n}\}= \{ 1, \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \frac{1}{5} , \dots\}$

$\{(1,1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), (4, \frac{1}{4}), (5, \frac{1}{5})\}$



$u_n = \frac{1}{n}$

[1-3-2] المتتابعة الحسابية
Arithmetic sequence

i) المتتابعة الحسابية: هي المتتابعة التي يكون فيها ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرةً عدداً ثابتاً ويسمى أساس المتتابعة (الفرق المشترك Common Difference)، ويرمز له $d= u_{n+1} - u_n$. ويمكن كتابة المتتابعة بمعرفة حدها الأول $u_1 = a$ وأساسها d. وقانون الحد العام للمتتابعة الحسابية هو $u_n= a + (n-1)\, d$ حيث $n \in N$.

ويمكن تحديد نوع المتتابعة بصورة عامة كما يلي:

i) المتتابعة المتزايدة وفيها $d > 0$ مثال $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$.

ii) المتتابعة المتناقصة: وفيها $d < 0$ مثال $\{4, 2, 0, -2, -4, \dots\}$.

iii) المتتابعة الثابتة وفيها $d = 0$. مثال $\{5, 5, 5, 5, 5, \dots\}$.

مثال (3) **اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الحسابية الآتية:**

i) متتابعة حسابية الحد الأول فيها 3 و أساسها 6 .

$\{3, 9, 15, 21, 27\}$

ii) متتابعة حسابية الحد الأول فيها 1 وأساسها 3- .

$\{1, -2, -5, -8 , -11\}$

iii) متتابعة حسابية حدها السابع 36 وأساسها 4 .

$u_7 = a + (n-1)\, d \Rightarrow u_7 = a + 6d \Rightarrow 36 = a + 6 \times 4 \Rightarrow a = 12$

$\{ 12, 16, 20, 24, 28\}$

$u_1 \overset{+d}{\Rightarrow} u_2 \overset{+d}{\Rightarrow} u_3 \Rightarrow \dots\dots \overset{+d}{\Rightarrow} u_n$

مثال (4) **اكتب حدود للمتتابعات الآتية:**

i) متتابعة حسابية حدها الثالث 8 و $d = -3$. جد الحدود بين u_7 و u_{11} .

نجد قيمة a ومنها نحصل على قيمة الحد 7 والحدود التي تليه

$u_n = a + (n-1)\, d \Rightarrow u_3 = a + 2d \Rightarrow 8 = a - 6 \Rightarrow a = 8 + 6 = 14$

$u_n = a + (n-1)\, d \Rightarrow u_7 = a + 6d \Rightarrow u_7 = 14 + 6(-3) \Rightarrow u_7 = -4$

$u_8 = 4_7 + d = -4 - 3 = -7 \ , \ u_9 = u_8 + d = -7 - 3 = -10$

حدود المتتالية

$u_{10} = 4_9 + d = -10 - 3 = -13 \ , \ \{-7 , -10, -13\}$

ii) اكتب الحد العشرين من المتتابعة الحسابية $\{6, 1, -4, -9, \dots\}$ وحدِّد ما إذا كانت المتتابعة متناقصة أم متزايدة.

$d = u_{n+1} - u_n \Rightarrow d = 1 - 6 = -5 , a = 6$

$u_n = a + (n-1)\, d \Rightarrow u_{20} = a + 19d \Rightarrow u_{20} = 6 + 19\,(-5) \Rightarrow u_{20} = -89$

بما أن d أصغر من صفر، لذا انّ المتتابعة متناقصة.

مثال (5) **اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:**

i) $\{2n -1\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, ii) $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1\}$

iii) $\{7\} = \{7, 7, 7, 7, 7\}$, iv) $\{\frac{n}{3}\} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\}$

v) $\{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, vi) $\{n^3\} = \{1, 8, 27, 64, 125\}$

تأكَّدْ من فهمِكَ

اكتب الأزواج المرتبة الأربعة الأولى للمتتابعة التي حدها العام معطى:

الأسئلة (1 - 5) مشابهة للمثال (2)

1 $u_n = 3n$

2 $u_n = n - 4$

3 $u_n = 3n^2$

4 $u_n = \frac{1}{2n}$

5 $u_n = 3n - 1$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الآتية:

الأسئلة (6 - 8) مشابهة للمثال (3)

6 متتابعة حسابية الحد الأول فيها 1 وأساسها 5.

7 متتابعة حسابية الحد الأول فيها 5- وأساسها 2.

8 متتابعة حسابية الحد الأول فيها 3- وأساسها 4 - .

اكتب حدود للمتتابعات الآتية:

الأسئلة (9 - 11) مشابهة للمثال (4)

9 جد الحدود بين u_8 و u_{12} لمتتابعة حسابية حدها الثالث 9 و $d = -2$.

10 جد الحدود بين u_6 و u_{10} لمتتابعة حسابية حدها الثاني 11- و $d = -3$.

11 اكتب الحد الثالث والعشرين من المتتابعة الحسابية $\{3, -1, -5, -9, \ldots\}$.

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

الأسئلة (12 - 15) مشابهة للمثال (5)

12 $\{4n\} = \ldots\ldots\ldots$

13 $\{2n - 5\} = \ldots\ldots\ldots$

14 $\{\frac{1}{n+1}\} = \ldots\ldots\ldots$

15 $\{9\} = \ldots\ldots\ldots$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

اكتب الأزواج المرتبة الأربعة الأولى للمتتابعة التي حدها العام معطى:

16 $u_n = 10 - 4n$

17 $u_n = n^2 - 1$

18 $u_n = \frac{1}{3n+1}$

19 اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة الآتية:

متتابعة حسابية الحد السابع فيها $\frac{1}{24}$ وأساسها $\frac{1}{3}$.

اكتب حدود للمتتابعات الآتية:

20 جد الحدود بين u_{10} و u_{13} لمتتابعة حسابية حدها السابع $\frac{13}{2}$ و $d = 1$.

21 جد الحدود بين u_{20} و u_{23} لمتتابعة حسابية حدها الثاني 0 و $d = -1$.

حدِّد نوع المتتابعة (متزايدة ، متناقصة ، ثابتة) لكل مما يأتي:

22 $\{u_n\} = \{3 - 2n\}$

23 $\{u_n\} = \{n^3 - 1\}$

24 $\{u_n\} = \{\frac{1}{n+2}\}$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

25 $\{\frac{3n}{2}\} = \ldots$

26 $\{\sqrt{3}\} = \ldots$

27 $\{\frac{n}{n+1}\} = \ldots$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



28 **رياضة الجري:** في إحدى مسابقات الجري، سُجِّلت أوقات الفائز الأول وفقاً للجدول الآتي:

المسافة بالكيلومتر	1	2	3	4	5
الوقت بالدقيقة والثانية	3.12	6.32	9.52	12.72	15.92

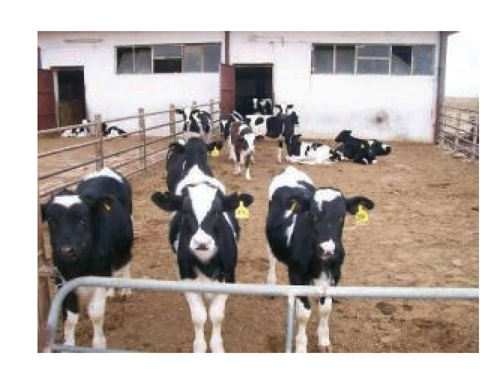
اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتابعة؟ علل إجابتك.



29 **رياضة القفز بالزانة:** يبيِّن الجدول التالي محاولات أحد أبطال العالم في رياضة سباق القفز بالزانة.

المحاولة	1	2	3	4	5
الارتفاع بالمتر	5.90	5.95	6.00	6.05	6.10

اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتابعة؟ علل إجابتك.



30 **زراعة:** اشترى حسّان مزرعة لتربية الأبقار وبعد سنة أصبح فيها 20 بقرةً، وبدأت تزداد كلَّ سنة نتيجة الولادات بمعدل ثابت حتى أصبح عددها الضعف بعد مضي ست سنوات. مثِّل المسألة بجدول واكتب الأزواج المرتبة فيه. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتابعة؟ علِّل إجابتك.

فَكِّرْ

31 **تحدٍّ:** جد قيمة x التي تجعل الحدود الثلاثة الأولى للمتتابعة الحسابية كما يأتي:

$$\{2x, x + 1, 3x + 11, ...\}$$

32 **أُصحِّحُ الخطأ:** قالت رابحة أنّ المتتابعة التي حدها العام $u_n = 8 - 2n$ متتابعة متزايدة لأن $d > 0$. اكتشف خطأ رابحة وصحّحه.

33 **حسٌّ عدديٌّ:** ماهو الحد الحادي عشر لمتتابعة حدها الثالث 4 وأساسها $-\frac{1}{2}$ ؟

أُكتبْ

الحد الذي ترتيبه 101 في المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس 4- وأساسها 2 .

الدرسُ [1-4] المتباينات المركبة

Compound Inequalities

فكرةُ الدرس

- حل المتباينات التي تحتوي أدوات الربط (و) ، (أو) وتمثيل الحل على مستقيم الأعداد.

المفردات

- المتباينة المركبة
- التقاطع
- الاتحاد
- مجموعة الحل

تعلم

تقاس درجات حرارة الجو خلال اليوم الواحد بدرجة الحرارة السيليزية الصغرى والكبرى لكونها متغيرة من وقت لآخر. فإذا كانت درجة الحرارة السيليزية الصغرى في مدينة بغداد في شهر كانون الأول 8^oC ودرجة الحرارة السيليزية الكبرى 15^oC. اكتب متباينة تمثل درجة الحرارة في بغداد وجد حلّها.



[1-4-1] المتباينات المركّبة التي تتضمن (و)

Compound inequalities contain "and"

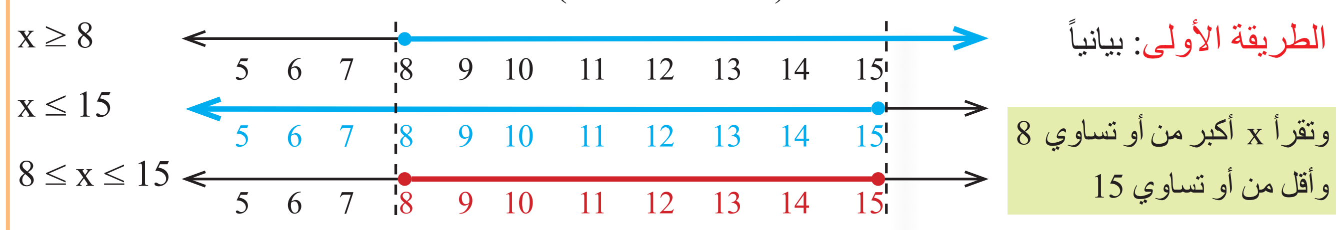
تعرفت سابقاً إلى المتباينات الجبرية وخواصها وكيفية إيجاد مجموعة الحل لها وتمثيله على مستقيم الأعداد، والآن سوف تتعرف إلى المتباينات المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) وكيفية إيجاد مجموعة الحل لها وتمثيله على مستقيم الأعداد الحقيقية. المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) مؤلفة من متباينتين فإنها تكون صحيحة فقط إذا كانت المتباينتان صحيحتين، وعليه فإن مجموعة الحل لها عبارة عن مجموعة تقاطع حل المتباينتين، ويمكن إيجاده بطريقتين الأولى بيانياً بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الأعداد ثم تحديد منطقة التقاطع، والثانية جبرياً وذلك بإيجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة التقاطع لهما $(S = S_1 \cap S_2)$.

مثال (1) اكتب المتباينة المركبة التي تمثل درجة الحرارة السيليزية الصغرى والكبرى في بغداد وجد حلها.

درجة الحرارة (الصغرى) لاتقل عن 8^o $(x \geq 8)$، درجة الحرارة (الكبرى) لاتزيد على 15^o $(x \leq 15)$،

لاتقل درجة الحرارة عن 8^o ولاتزيد على 15^o $(x \leq 15$ و $x \geq 8)$، ويمكن حلها بإحدى الطريقتين:

الطريقة الأولى: بيانياً



وتقرأ x أكبر من أو تساوي 8 وأقل من أو تساوي 15

الطريقة الثانية: جبرياً

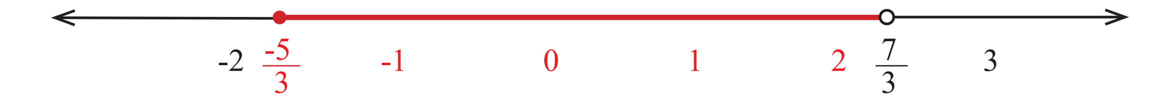
$8 \leq x \leq 15 \Leftrightarrow x \geq 8$ و $x \leq 15$

$$\Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = \{x: x \geq 8\} \cap \{x: x \leq 15\} = \{x: 8 \leq x \leq 15\}$$

مثال (2) حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) $-3 \leq 3x+2 < 9$ جبرياً ومثّل الحل على مستقيم الأعداد:

$$-3 \leq 3x+2 < 9 \Rightarrow -3-2 \leq 3x+2-2 < 9-2 \Rightarrow -5 \leq 3x < 7 \Rightarrow \frac{-5}{3} \leq \frac{3x}{3} < \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-5}{3} \leq x < \frac{7}{3} \Rightarrow S = \{x: \frac{-5}{3} \leq x < \frac{7}{3}\}$$



[1-4-2] المتباينات المركبة التي تتضمن (أو)

Compound inequalities contain "or"

بعد أن تعرفت إلى المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) سوف تتعرف إلى المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (أو) وتكون صحيحة فقط إذا كانت إحدى المتباينتين المكونتين لها في الأقل صحيحة، وعليه فإن مجموعة الحل لها عبارة عن مجموعة اتحاد حل المتباينتين، ويمكن إيجاده بطريقتين الأولى بيانياً بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الأعداد ثم تحديد منطقة الاتحاد، والثانية جبرياً وذلك بإيجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة الاتحاد لهما $(S = S_1 \cup S_2)$.

مثال (3) حل المتباينة المركبة $x+3 > 2$ أو $x+3 \le -2$ بيانياً وجبرياً.

الطريقة الأولى: بيانياً

$x > -1$ ، $x+3 > 2$

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3

$x \le -5$ ، $x+3 \le -2$

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3

$x \le -5$ أو $x > -1$

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3

الطريقة الثانية: جبرياً

$x+3 > 2$ أو $x+3 \le -2 \Rightarrow \begin{cases} x+3 > 2 \text{ أو } x+3 \le -2 \\ x > -1 \text{ أو } x \le -5 \end{cases}$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{x: x > -1\} \cup \{x: x \le -5\}$

مثال (4) حل المتباينة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثّل الحل على مستقيم الأعداد:

i) $y-3 \le -1$ أو $y+3 > 6 \Rightarrow y \le 2$ أو $y > 3$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{y: y \le 2\} \cup \{y: y > 3\}$

-1 0 1 2 3 4 5

ii) $\frac{2v+1}{3} > \frac{5}{3}$ أو $\frac{2v+1}{3} < \frac{1}{3} \Rightarrow v > 2$ أو $v < 0$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{v: v > 2\} \cup \{v: v < 0\}$

-2 -1 0 1 2 3 4

[1-4-3] المتباينة المثلثية

Triangular inequality

من المواضيع التي تربط الجبر بالهندسة هي المتباينة المثلثية "في كل مثلث مجموع طول ضلعين من أضلاعه يكون أكبر من طول الضلع الثالث" وتستعمل في الإنشاءات الهندسية والتصاميم، إذا كانت أطوال أضلاع مثلث (A,B,C) فيجب أن تكون المتباينات الثلاث التالية صحيحة: $A+B > C$, $A+C > B$, $B+C > A$.

مثال (5) i) هل يمكن للقطع المستقيمة التي طولها 2cm ،10cm ،13cm أن تشكّل مثلثاً؟

لايمكن أن تشكل مثلثاً لأنه: خطأ $2 + 10 \not> 13$ ، صحيحة $10 + 13 > 2$ ، صحيحة $2 + 13 > 10$.

ii) اكتب متباينة مركبة تبين طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه 8cm ، 10cm.

نفرض طول الضلع الثالث x ومنه:

$8 + 10 > x \Rightarrow 18 > x \Rightarrow$ الضلع الثالث أصغر من 18

$8 + x > 10 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow$ الضلع الثالث أكبر من 2

$10 + x > 8 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow$ لاتعطي أية معلومات مفيدة

$\Rightarrow$ ولذا يجب أن يكون طول الضلع أصغر من 18 وأكبر من 2 وبالمتباينة المركبة تبيّن طول الضلع الثالث $2 < x < 18$

تأكَّدْ من فهمِكَ

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانياً:

الأسئلة (1 - 2) مشابهة للمثال (1)

1) $-4 \le y - 1 < 3$

2) $-4 \le z + 2 \le 8$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

الأسئلة (3 - 4) مشابهة للمثال (2)

3) $x+6 \ge 12$ و $x+6 < 15$

4) $-9 < 2x - 1 \le 3$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانياً:

الأسئلة (5 - 6) مشابهة للمثال (3)

5) $8y \ge 64$ أو $8y \le 32$

6) $\frac{2z}{3} < \frac{2}{3}$ أو $\frac{2z}{3} \ge \frac{8}{9}$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثِّل الحل على مستقيم الأعداد:

الأسئلة (7 - 8) مشابهة للمثال (4)

7) $3n-7 > -5$ أو $3n-7 \le -9$

8) $x+15 \ge 30$ أو $x+15 < 22$

هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يأتي:

الأسئلة (9 - 12) مشابهة للمثال (5)

9) $1cm, 2cm, \sqrt{3}\ cm$

10) $5cm, 4cm, 9cm$

11) $1cm, \sqrt{2}\ cm, \sqrt{2}\ cm$

12) $3cm, 4cm, 2\sqrt{3}\ cm$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانياً:

13) $x > -12$ و $x \le -7$

14) $2 \le y + 4 < 6$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

15) $14 \le 3x+7$ و $3x+7 < 26$

16) $\frac{1}{25} \le \frac{z+3}{5} \le \frac{1}{15}$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانياً:

17) $z-2 < -7$ أو $z-2 > 4$

18) $x-6 \le -1$ أو $x-6 > 4$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

19) $x+8 < 22$ أو $x+10 \ge 30$

20) $y < -1$ أو $y+3 > 2$

21) $\frac{y}{2} < 3\frac{1}{2}$ أو $\frac{y}{2} > 7\frac{1}{2}$

22) $5x \le -1$ أو $5x \ge 4$

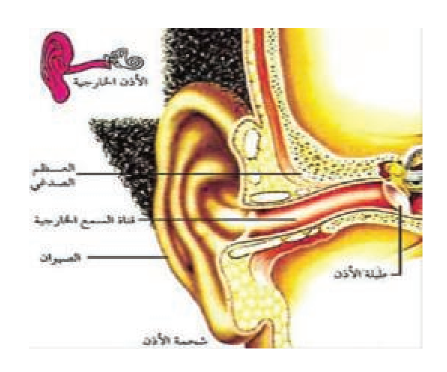
اكتب المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولا ضلعي المثلث معلومين:

23) 3cm , 10cm

24) 6cm, 4cm

25) 1cm, 3cm

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



26 **صوت:** أُذن الإنسان يمكن أن تسمع الأصوات التي لايقل ترددها عن 20 هرتزاً ولايزيد على 20000 هرتز. اكتب متباينة مركبة تمثل الترددات التي لاتسمعها أُذن الإنسان، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.



27 **إطار السيارات:** ضغط الهواء المثالي الموصى به لإطارات السيارات الصالون لايقل عن 28 Pascal $(kg/\ ing^2)$ ولايزيد على 36 Pascal. اكتب متباينة مركبة تمثل الضغط، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

ملاحظة: باسكال (pascal) وحدة قياس ضغط الهواء مقدرة $kg/\ ing^2$



28 **القطار المغناطيسي:** القطار المغناطيسي المعلق وهو قطار يعمل بقوة الرفع المغناطيسية وباختصار يعرف بالماجليف (Maglev). وصُمِّمت أنواع مختلفة من هذه القطارات المغناطيسية في مختلف دول العالم إذ إنّ سرعتها لاتقل عن 300 k/h ولاتزيد على 550 k/h . اكتب متباينة تمثّل سرعة القطار، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

فَكِّرْ

29 **تحدٍّ:** اكتب متباينة مركبة تبين مدى طول الضلع الثالث في كل مثلث:

7cm, 12cm, x cm

30 **أُصحّحُ الخطأ:** قالت سوسن إنّ المتباينة المركبة $x+3 \le 5$ و $-4 < x+3$ تمثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد الآتية:

-9 -8 -7 -6 -5 -4 -2 -1 0 1 2 3 4 5

بيّن خطأ سوسن وصحّحه.

31 **حسٌّ عدديٌّ: اذكر ما إذا كانت الأطوال الثلاثة هي لمثلث أم لا؟ ووضّح إجابتك .**

ii) 1cm, 1cm, $\sqrt{2}$ cm

i) 3.2cm, 5.2cm, 6.2cm

أُكتبْ

متباينة مركبة التي تمثل درجة الحرارة الصغرى 18^o ودرجة الحرارة العظمى 27^o.

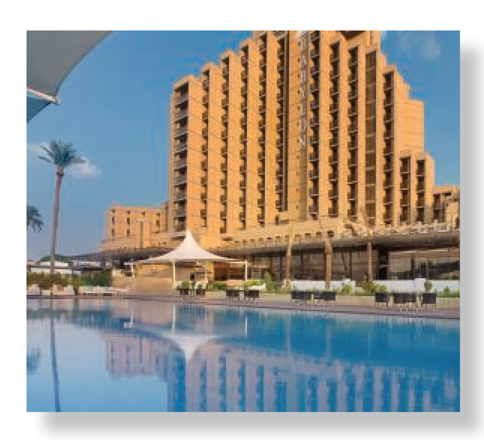
الدرسُ [1-5] متباينات القيمة المطلقة
Absolute Value Inequalities

فكرةُ الدرس
- حل المتباينات التي تحتوي على قيمة مطلقة.

المفردات
- القيمة المطلقة

تعلم

فندق بابل من الفنادق السياحية في العاصمة بغداد ويقع في منطقة الكرادة. درجة حرارة الماء المثالية في حوض السباحة 25 درجة سيليزية تزداد أو تنقص بمقدار درجة واحدة.
اكتب متباينة قيمة مطلقة تمثل مدى درجة حرارة الماء في حوض السباحة.



[1-5-1] متباينات القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \le a$ حيث $x \in R$
Absolute value inequalities with form $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \le a$, $a \in R$

تعرفت سابقاً إلى المتباينات المركبة التي تحتوي على (و) و (أو) وكيفية حلها بيانياً وجبرياً وكيفية تمثيل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد. والآن سوف تتعرف إلى متباينة القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \le a$ ، $a \in R$
مثل $|x| < 4$ وتعني: ما هي قيم x التي تبعد عن الصفر بأقل من 4 وحدات؟
وهي كل الأعداد التي بين العددين 4- و 4 وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو:

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

ونلاحظ أن حل هذه المتباينة هو $x < 4$ و $-4 < x$
أي إنّ متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أصغر من (أصغر من أو يساوي) تمثل متباينة مركبة تتضمن (و).
بصورة عامة $|x| \le a \Rightarrow -a \le x \le a \,,\, a > 0$

مثال (1) اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل درجة حرارة الماء في الحوض ومثله بيانياً.

نفرض درجة حرارة الماء هي x درجة سيليزية، لذا المتباينة التي تمثل درجة حرارة الحوض عندما لاتزيد على 26^0 سيليزية:
$x \le 25 + 1 \Rightarrow x - 25 \le 1$
والمتباينة التي تمثل درجة حرارة الحوض عندما لاتنقص عن 24^0 درجة سيليزية:
$x \ge 25 - 1 \Rightarrow x - 25 \ge -1$
لذا متباينة القيمة المطلقة هي المتباينة المركبة التي تمثل مدى درجة حرارة الماء في حوض السباحة:
$x - 25 \ge -1$ و $x - 25 \le 1 \Rightarrow -1 \le x - 25 \le 1 \Rightarrow |x - 25| \le 1$
وتمثيل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد هو

22 23 24 25 26 27 28

مثال (2) حل متباينات القيمة المطلقة، ومثّل الحل على مستقيم الأعداد.

i) $|x + 6| < 3 \Rightarrow -3 < x + 6 < 3 \Rightarrow -3-6 < x < 3-6$
$\Rightarrow -9 < x < -3$

-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2

ii) $|y| - 5 \le 1 \Rightarrow |y| \le 1 + 5 \Rightarrow |y| \le 6$
$\Rightarrow -6 \le y \le 6$

-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

[1-5-2] متباينات القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| > a$ ، $|g(x)| \geq a$ حيث $x \in R$

Absolute value inequalities with form $|g(x)| > a$ ، $|g(x)| \geq a$, $a \in R$

بعد أن تعرفت إلى متباينة القيمة المطلقة التي تحتوي على صورة $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \leq a$ حيث $x \in R$ والآن سوف تتعرف إلى متباينة القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| > a$ ، $|g(x)| \geq a$ حيث $x \in$ مثل $|x| > 3$ وتعني: المسافة بين x والصفر أكبر من 3 أي أنّ $x > 3$ أو $x < -3$ ومجموعة حل المتباينة هو $\{x: x < -3\} \cup \{x: x > 3\}$

لذا فإن متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أكبر من (أكبر من أو يساوي) هي علاقة مركبة تتضمن (أو).

بصورة عامة $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ أو $x \leq -a$, $a > 0$

مثال (3) حل متباينة القيمة المطلقة ومثّل الحل على مستقيم الأعداد.

i) $|x+4| > 2 \Rightarrow x+4 < -2$ أو $x+4 > 2 \Rightarrow x < -6$ أو $x > -2$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{x: x < -6\} \cup \{x: x > -2\}$

ii) $|5y-1| \geq 4 \Rightarrow 5y-1 \leq -4$ أو $5y-1 \geq 4 \Rightarrow y \leq -\frac{3}{5}$ أو $y \geq 1$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{y: y \leq -\frac{3}{5}\} \cup \{y: y \geq 1\}$

iii) في تحليلات دم الإنسان البالغ يعد المدى الطبيعي للبوتاسيوم هو (3.5 - 5.3) mol/L.اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم في دم الإنسان.

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية واقل من القيمة الدنيا للمعدل هي: $x < 3.5$

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية وأكبر من القيمة العليا للمعدل هي: $x > 5.3$

المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم هو حل المتباينة المركبة: $x < 3.5$ أو $x > 5.3$

نجد متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم:

نأخذ منتصف المسافة بين نقطتين ونطرح ونضيف نصف قطر المسافة

$x < 3.5$ أو $x > 5.3 \Leftrightarrow x < 4.4 - 0.9$ أو $x > 4.4 + 0.9$

$\Leftrightarrow x - 4.4 < -0.9$ أو $x - 4.4 > 0.9 \Leftrightarrow |x - 4.4| > 0.9$

مثال (4) جد مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة الآتية:

i) $|2x-5| + 3 < 11 \Rightarrow |2x-5| < 8 \Rightarrow -8 < 2x-5 < 8 \Rightarrow -3 < 2x < 13$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{13}{2} \Rightarrow \{x: x > -\frac{3}{2}\} \cap \{x: x < \frac{13}{2}\} \Rightarrow \{x: -\frac{3}{2} < x < \frac{13}{2}\}$

ii) $|7-y| < 8 \Rightarrow -8 < 7-y < 8 \Rightarrow -15 < -y < 1 \Rightarrow -1 < y < 15 \Rightarrow \{y: y > -1\} \cap \{y: y < 15\}$

iii) $\left|\frac{2t-8}{4}\right| \geq 9 \Rightarrow \left|\frac{2(t-4)}{4}\right| \geq 9 \Rightarrow \left|\frac{t-4}{2}\right| \geq 9 \Rightarrow |t-4| \geq 18$

$\Rightarrow t-4 \leq -18$ أو $t-4 \geq 18 \Rightarrow t \leq -14$ أو $t \geq 22 \Rightarrow \{t: t \leq -14\} \cup \{t: t \geq 22\}$

iv) $\left|\frac{5-3v}{2}\right| \geq 6 \Rightarrow |5-3v| \geq 12 \Rightarrow 5-3v \leq -12$ أو $5-3v \geq 12 \Rightarrow -3v \leq -17$ أو $-3v \geq 7$

$\Rightarrow v \geq \frac{17}{3}$ أو $v \leq \frac{-7}{3} \Rightarrow \{v: v \geq \frac{17}{3}\} \cup \{v: v \leq \frac{-7}{3}\}$

تأكَّدْ من فهمِكَ

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل التالية:

الأسئلة (1 - 2) مشابهة للأمثلة (1،3)

1 تعد درجة الحرارة المثلى داخل الشقق 22^{o} سيليزية بزيادة أو نقصان لايتجاوز 2^{o} سيليزية.

2 الزاوية القائمة تتحول إلى زاوية حادة أو منفرجة إذا تحرك مؤشر الزاوية إلى اليمين أو إلى اليسار في الأقل بدرجة واحدة.

حل متباينات القيمة المطلقة ومثّل الحل على مستقيم الأعداد.

الأسئلة (3 - 6) مشابهة للمثال (2)

3 $|x+1|<5$

4 $|3z-7|\le 2$

5 $|x|+8<9$

6 $|5y|-2\le 8$

الأسئلة (7 - 10) مشابهة للمثال (3)

7 $|x+4|>6$

8 $|5z-9|>1$

9 $|2x|+7\ge 8$

10 $|4y|-2>3$

الأسئلة (11 - 14) مشابهة للمثال (4)

11 $|5-x|<10$

12 $|4z-14|>2$

13 $\left|\frac{x-12}{4}\right|\le 9$

14 $\left|\frac{6-2y}{4}\right|\ge 9$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل الآتية:

15 يجب أن تبقى درجة الحرارة داخل الثلاجة 8^{o} سيليزية بزيادة أو نقصان لايتجاوز 0.5^{o} سيليزية. اكتب مدى درجة الحرارة المثالية في داخل الثلاجة.

16 درجة غليان الماء 100^{o} سيليزية عند مستوى سطح البحر وتزداد وتنقص في المناطق الجبلية والوديان بما لايتجاوز 20^{o} سيليزية. اكتب مدى التذبذب في درجة غليان الماء.

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية:

17 $|x+3|<6$

18 $|x|-6<5$

19 $|2z|-5<2$

20 $|y-3|\ge \frac{1}{3}$

21 $2|x|-7\ge 1$

22 $|9y|-6>3$

23 $|11z|-2\ge 9$

24 $|1-x|<1$

25 $\left|\frac{4}{5}z-1\right|>\frac{4}{5}$

26 $\left|\frac{z-1}{7}\right|\le 2$

اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية:

27

-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3

28

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3

29

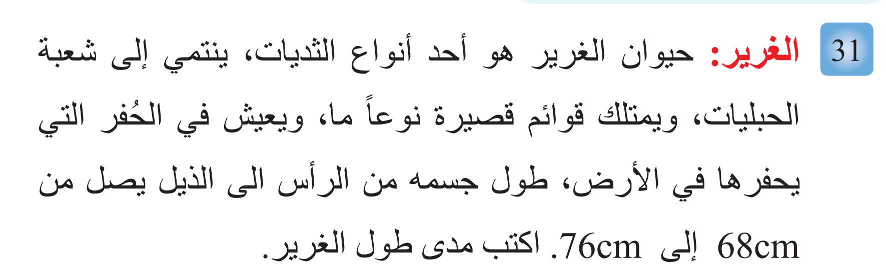
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

30

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل كل مسألة مما يأتي:



31 **الغرير:** حيوان الغرير هو أحد أنواع الثديات، ينتمي إلى شعبة الحبليات، ويمتلك قوائم قصيرة نوعاً ما، ويعيش في الحُفر التي يحفرها في الأرض، طول جسمه من الرأس الى الذيل يصل من 68cm إلى 76cm. اكتب مدى طول الغرير.



32 **صحة:** معدل النبض (عدد دقات القلب) الطبيعي للإنسان البالغ يتراوح من 60 الى 90 نبضةً في الدقيقة. اكتب مدى عدد الدقات غير الطبيعية لقلب الإنسان.



33 **مواصلات:** تطير الطائرات المدنية على ارتفاع يتراوح من 8km إلى 10km إذ تعد منطقةً جويةً معتدلةً. اكتب مدى منطقة الطيران المدنية.



فكِّرْ

34 **تحدٍّ:** **حل متباينات القيمة المطلقة ومثّل الحل على مستقيم الأعداد.**

i) $\left| \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} \right| \leq \sqrt{6}$ ii) $\left| \frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}\, y}{\sqrt{5}} \right| \geq \sqrt{15}$

35 **أُصحِّحُ الخطأ:** قالت خلود إن متباينة القيمة المطلقة $|6 - 3y| \geq 7$ تمثل متباينة مركبة بعلاقة (و) ومجموعة الحل لها: $\{ y: -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{13}{2} \}$. بيِّن خطأ خلود وصحّحه.

36 **حسٌّ عدديٌّ:** **اكتب مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة التالية في مجموعة الأعداد الحقيقية:**

i) $|z| - 1 < 0$ ii) $|x - 1| > 0$

أُكتبْ

متباينة قيمة مطلقة تمثّل موقفاً من واقع الحياة، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

الدرسُ [1-6] خطة حل المسألة (إفهم المسألة)

Problem Solving Plan (Understand the Problem)

فكرةُ الدرس

• استعمال استراتيجية إفهم المسألة لحل المسألة.



تعلم

أظهرت دراسة مسحية أنّ 62% من الشباب يمارسون رياضة كرة القدم، فإذا كان هامش الخطأ ضمن 4 نقاط مئوية. فجِدْ مدى النسبة المئوية للشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم .



إِفهم

ما المعطيات في المسألة؟ 62% من الشباب يمارسون رياضة كرة القدم، هامش الخطأ هو 4 نقاط.

ما المطلوب من المسألة؟ إيجاد مدى النسبة المئوية التي تمثل الشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم.

خطّط

كيف تحلّ المسألة؟ بما أن النسبة المئوية للشباب الذين يمارسون كرة القدم هي 62% والنسبة الواردة في الدراسة أقل من أو تساوي 4%، لذا $|x - 62| \leq 4$ إذ x تمثل النسبة الفعلية للشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم.

حلّ

نجد مجموعة الحل لمتباينة القيمة المطلقة:

$|x - 62| \leq 4 \Rightarrow x - 62 \geq -4$ و $x - 62 \leq 4$

$\Rightarrow x \geq -4 + 62$ و $x \leq 4 + 62$

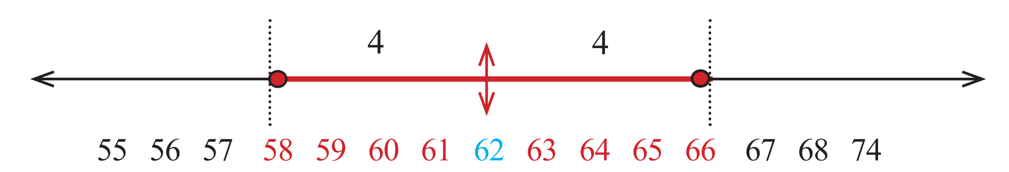
$\Rightarrow x \geq 58$ و $x \leq 66$

$\Rightarrow \{x: x \geq 58\} \cap \{x: x \leq 66\}$

$\Rightarrow \{x: 58 \leq x \leq 66\}$ مدى نسبة الشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم

تحقّق

استعمل مستقيم الأعداد للتحقق من صحة الحل:

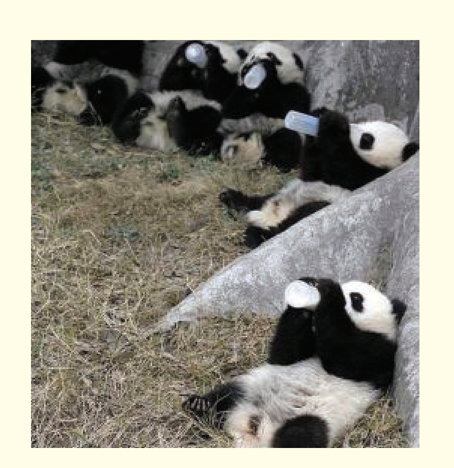


Problems مسـائل

حلّ المسائل التالية باستراتيجية (اِفهم المسألة)



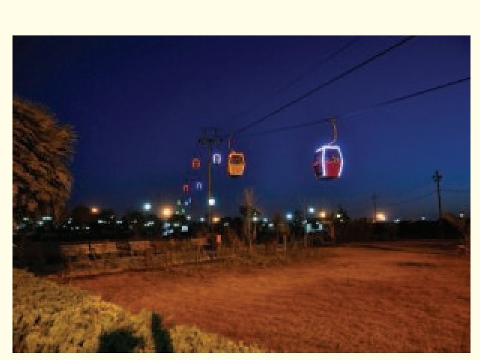
1 **سمكُ السلمون:** متوسّط عمر سمك السلمون من سنتين إلى ثماني سنوات، كما أنّه يكون مهدّداً بالخطرعند ارتفاع درجة حرارة المياه، فهو يعيش في درجة حرارة تتراوح من 20 درجة سيليزية إلى 23 درجة، اكتب متباينة تمثل درجة المياه التي لايعيش فيها سمك السلمون واكتب مجموعة الحل.



2 **دبُّ الباندا:** تلد أنثى الباندا صغيراً واحداً أو اثنين ويحتاج الصغير إلى حليب أمه لأكثر من (6 إلى 14) مرةً في اليوم، صغار الباندا العملاقة تزن من 40kg الى 60kg في عام واحد، ويعيشون مع أمهاتهم حتى سنتين من العمر. اكتب متباينة تمثل وزن صغير الباندا عندما يكون عمره سنة واحدة واكتب مجموعة الحل.



3 **خليةُ النحل:** لاحظ أنور من خلال دراسة مسحية على خلية نحل أنّ 88% من ذكور النحل يطردون من الخلية في نهاية الصيف، فإذا كان هامش الخطأ 3 نقاط مئوية. اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل مدى النسبة المئوية لذكور النحل الذين يُطرَدون من الخلية واكتب مجموعة الحل.



4 **التلفريك:** التلفريك أو المعبر الهوائي وهو من أرخص وأبسط وسائل النقل يعمل بالكهرباء ويعدُّ واسطةَ نقل في الدول التي تكثر فيها الجبال والأسطح الوعرة، وتلجأ إليه بعض الدول أيضاً كوسيلة للترفيه ومشاهدة المناظر كما في شمال العراق. أقلُّ سرعةٍ لعربات التلفريك 20km/h وأكبر سرعة 40km/h. اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تبيِّن مدى سرعة عربات التلفريك واكتب مجموعة الحل.

مراجعةُ الفصلِ Chapter Review

المفردات

English	عربي	English	عربي
general term	الحد العام	real number	العدد الحقيقي
constant sequence	المتتابعة الثابتة	rooting	تجذير
common difference	أساس المتتابعة	conjugate	المرافق
increasing sequence	المتتابعة المتزايدة	relation	العلاقة
decreasing sequence	المتتابعة المتناقصة	ordered Pair	زوج مرتّب
compound inequality	المتباينة المركبة	function	الدالة
absolute value	القيمة المطلقة	surjective mapping	تطبيق شامل
absolute value Inq.	متباينة القيمة المطلقة	injective mapping	تطبيق متباين
intersection	التقاطع	bijective mapping	تطبيق متقابل
union	الاتحاد	domain	المجال
solution set	مجموعة الحل	co-domain	المجال المقابل
less than	أقل من	range	المدى
less than or equal	أقل من أو يساوي	composition of mapping	تركيب التطبيقات
greater than	أكبر من	sequence	متتابعة
greater than or equal	أكبر من أو يساوي	arithmetic sequence	متتابعة حسابية

الدرسُ [1-1] ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية

مثال1: بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

$$(-8)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{18}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{4}\sqrt{2} - \sqrt{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2})$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx \frac{3}{2} \times 1.4 = 2.1$$

تدريب1: بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = ...$$

....

مثال2: استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

$$0.016 \times 10^4 + 1.957 \times 10^3$$

$$= 0.16 \times 10^3 + 1.957 \times 10^3$$

$$\approx 2.12 \times 10^3$$

تدريب2: استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

$6.25 \times 10^3 \div 0.015 \times 10^6 =$ ....

....

الدرسُ [1-2] التطبيقات

مثال: إذا كان التطبيق: $R: A \longrightarrow B$ معطى كما يأتي:

$R = \{(1,4), (2,4), (3,5)\}$

حيث $B = \{4,5,6\}$, $A = \{1,2,3\}$

مثّل التطبيق بمخطط سهمي، وحدّد المجال والمدى للتطبيق.

المخطط السهمي

المجال: $\{1, 2, 3\}$

المدى: $\{4,5\}$

تدريب: إذا كانت $A=\{1, 2, 3\}$ وكان التطبيقان $f: A \longrightarrow A$ و $g: A \longrightarrow A$ معرفين كما يأتي:

$f = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$

$g = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

فجد تركيب الدالتين: i) fog , ii) gof

....

....

الدرسُ [1-3] المتتابعات

مثال1: اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $\{u_n\}$

i) $u_n = \frac{1}{n}$

$\{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...\}$

ii) $u_n = \frac{2n-1}{n}$

$\{\frac{2n-1}{n}\} = \{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, ...\}$

مثال2: اكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتابعة حسابية حدها السابع 6 وأساسها 3 .

$u_n = a + (n-1)d \longrightarrow u_7 = a + 6d$

$\Rightarrow 6 = a + 6 \times 3 \Rightarrow a = -12$

$\{-12, -9, -6, -3, 0, ...\}$

تدريب1: اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

i) $\{3n - 2\} =$ ....

ii) $\{(-2)^n\} =$ ....

تدريب2: اكتب الحد العشرين من المتتابعة الحسابية:

$\{12, 6, 0, -6, -12, ...\}$

....

....

....

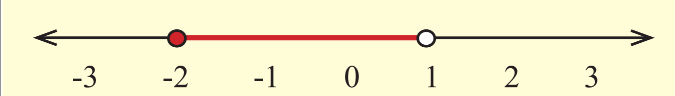
الدرسُ [1-4] المتباينات المركّبة

مثال1: حلّ المتباينة المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثّل الحل على مستقيم الأعداد:

$2x - 2 \geq -6$ و $2x - 2 < 0 \Rightarrow -6 \leq 2x - 2 < 0$

$\Rightarrow -4 \leq 2x < 2 \Rightarrow -2 \leq x < 1$

$\Rightarrow S = \{x : -2 \leq x < 1\}$



مثال2: حل المتباينة المركّبة جبرياً ومثّلها على مستقيم الأعداد.

$x + 1 > 3$ أو $x + 1 \leq -4$

$\Rightarrow x > 2$ أو $x \leq -5$

$\Rightarrow \{x: x > 2\} \cup \{x: x \leq -5\}$

-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

تدريب1: حلّ المتباينة المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

$-9 < 2x - 1 \leq 3$

....

....

....

....

تدريب2: حلّ المتباينة المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثّل الحل على مستقيم الأعداد:

$2y - 6 > -3$ أو $2y - 6 \leq -7$

....

....

....

الدرسُ [1-5] متباينات القيمة المطلقة

مثال1: حلّ متباينة القيمة المطلقة، ومثّل الحل على مستقيم الأعداد.

$|x + 1| < 5 \Rightarrow -5 < x + 1 < 5$

$\Rightarrow -5-1 < x < 5-1 \Rightarrow -6 < x < 4$

$\Rightarrow S = \{x: -6 < x < 4\}$

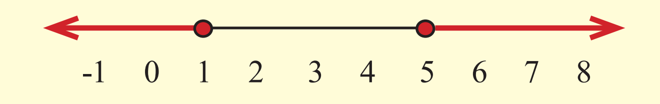
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

مثال2: حلّ متباينة القيمة المطلقة، ومثّل الحل على مستقيم الأعداد.

$\left|\frac{3z-9}{6}\right| \geq 1 \Rightarrow \left|\frac{3(z-3)}{6}\right| \geq 1 \Rightarrow \left|\frac{z-3}{2}\right| \geq 1$

$\Rightarrow |z-3| \geq 2 \Rightarrow -2 \geq z-3$ أو $z-3 \geq 2$

$\Rightarrow 1 \geq z$ أو $z \geq 5 \Rightarrow \{z: 1 \geq z\} \cup \{z: z \geq 5\}$



تدريب1: حلّ متباينة القيمة المطلقة، ومثّل الحل على مستقيم الأعداد.

$|3y| - 1 \leq 8$

....

....

....

تدريب2: حلّ متباينة القيمة المطلقة، ومثّل الحل على مستقيم الأعداد.

$\left|\frac{6-2x}{8}\right| \geq 3$

....

....

....

اختبار الفصل

Chapter Test

بسِّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

1. $(\sqrt{3}+\sqrt{5})\ (\sqrt{3}+\sqrt{5}) =.....$

2. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8}-5}{3\sqrt{2}} =.....$

3. استعمل ترتيب العمليات والحاسبة لتكتب ما يلي مقرّباً لأقرب عُشر:

$$(\frac{1}{125})^{\frac{1}{3}} - (-\frac{1}{2})^{0} + (121)^{\frac{1}{2}} \times (\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}} =.....$$

4. إذا كان $f: z \longrightarrow R$ حيث $f(x) = x^2$. ارسم مخططاً سهمياً للتطبيق وبيِّن هل أنّ التطبيق متباين، شامل، أو متقابل؟

5. إذا كان التطبيق $f: N \longrightarrow N$ إذ إنّ $f(x) = 3x + 1$, $g: N \longrightarrow N$ إذ $g(x) = x^2$.
جد: $(gof)(5)$, $(fog)(5)$, $(gof)(2)$, $(fog)(2)$.

6. إذا كان التطبيق $f: R \longrightarrow R$ حيث $f(x)= 3x+1$ والتطبيق $g: R \longrightarrow R$ إذ إنّ $g(x)= 2x+5$.
هل أن $(gof)(x) = (fog)(x)$ ؟ جد قيمة x إذا كانت $(fog)(x) = 28$.

اكتب حدود للمتتابعات الآتية:

7. جد الحدود بين u_3 و u_8 لمتتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{-3}{2}$ و $d = 2$.

8. جد الحدود بين u_4 و u_9 لمتتابعة حسابية حدها الثالث 6 و $d = -\frac{5}{2}$.

حدّد نوع المتتابعة (متزايدة ، متناقصة ، ثابتة) لكل مما يأتي:

9. $u_n = 9 - 3n$

10. $u_n = n^2 - 2$

11. $u_n = \frac{1}{3n+1}$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

12. $\{\frac{n}{n+2}\} =.....$

13. $\{4\sqrt{2}\}=.....$

14. $\{\frac{-n}{n+5}\}=......$

حلّ المتباينات المركّبة ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

15. $x + 6 \geq 12$ و $x+6 < 20$

16. $\frac{1}{16} < \frac{z+2}{2} \leq \frac{1}{8}$

17. $x-3 \leq -5$ أو $x-3 > 5$

18. $7t-5 > -1$ أو $7t-5 \leq -14$

19. $y \leq 0$ أو $y +7 \geq 16$

20. $\frac{y}{3} < 1\frac{1}{3}$ أو $\frac{y}{3} > 9\frac{1}{3}$

اكتب المتباينة المركّبة التي تبيّن مدى طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولا ضلعَي المثلث معلومين:

21. 4cm , 9cm

22. 5cm ,12cm

23. 7cm ,15cm

حلّ متباينات القيمة المطلقة الآتية:

24. $|x - 6| \leq 3$

25. $|3z| - 5 < 4$

26. $|x + 1| > \frac{1}{2}$

27. $6|x| - 8 \geq 3$

28. $|3y| - 2 > 9$

29. $|8z| -1 > 7$

30. $|4 - 3y| \geq 14$

31. $|\frac{6-3y}{9}| \geq 5$

الفصلُ 2

المقادير الجبرية

Algebraic Expressions



المدرسة المستنصرية مدرسة عريقة أُسّستْ في زمن العباسيين في بغداد عام 1233، وكانت مركزاً علمياً وثقافياً مهماً. تقع في جهة الرصافة من بغداد، وتتوسط المدرسة ساحة مستطيلة الشكل فيها نافورة كبيرة فيها ساعة المدرسة المستنصرية، لو فرضنا أن طول الساحة الداخلية للمدرسة هو $(x+14)$ متراً وعرضها $(x+2)$ متر، فيمكن حساب المساحة بضرب المقدارين الجبريين $(x+2)$ $(x+14)$.

Pretest الاختبارُ القبليّ

جد ناتج جمع المقادير الجبرية التالية أو طرحها:

1. $(3x^2 + 4x - 12) + (2x^2 - 6x + 10)$
2. $(\frac{1}{2} zy + 5z - 7y) - (\frac{1}{4} zy - 3z + 2y)$

جد ناتج الضرب للحدود الجبرية الآتية:

3. $7x^2 \times \frac{1}{14x}$
4. $\sqrt{2}\, yz \times \sqrt{2}\, yz^2$
5. $\frac{3}{4} v^2 t \times \sqrt{12}\, t^{-1}$
6. $3h (\frac{1}{6} v - \frac{1}{3} h^{-2})$

جد ناتج ضرب مقدارين جبريين:

7. $(x+2)(x-2)$
8. $(5-2z)(3+3z)$
9. $(\frac{1}{2} x^2 + 6)(\frac{4}{3} x^2 + 12)$
10. $(2\sqrt{3}\, t - 4)^2$
11. $(x+3)(x^2 - 3x + 9)$
12. $(xy+1)(x^{-1} y - xy^{-1} - 1)$

جد ناتج الضرب باستعمال الطريقة العمودية:

13. $(y-1)(y+1)$
14. $(2x+3)(4x^2 - x - 5)$
15. $(3-z)(3+5z-z^2)$

جد ناتج قسمة المقادير الجبرية الآتية:

16. $\frac{3xy^2}{15x^2y}$
17. $\frac{-47z^{-2}}{7z^2}$
18. $\frac{8x^3 + 4x^2 - 2x}{2x}$
19. $\frac{21 - 14a + 7a^2}{7a}$

حلل المقادير الجبرية باستعمال العامل المشترك الأكبر:

20. $3y^3 + 6y^2 - 9y$
21. $\frac{1}{2} zx^2 - 2z^2 x + 4zx$



الدرسُ [2-1] ضرب المقادير الجبرية

Multiplying Algebraic Expressions

فكرةُ الدرس

- ضرب مقدار جبري في مقدار جبري يمثل حالات خاصة.

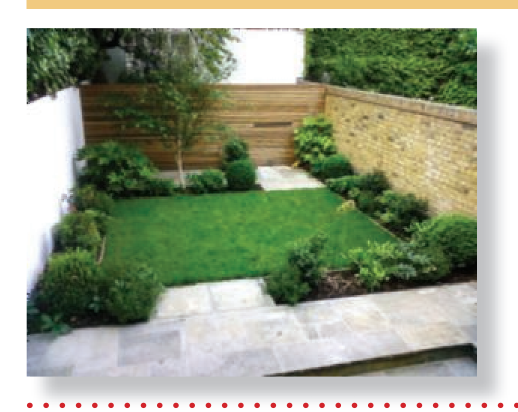
المفردات

- مربع مجموع
- مربع فرق
- مكعب مجموع
- مكعب فرق

تعلم

حوّطت حديقة منزلية مربّعة الشكل طول ضلعها h متر بممر عرضه 1 متر.

ما مساحة الممر بدلالة h ؟



[2-1-1] ضرب مقدارين جبريين كل منهما من حدين

Multiplying two algebraic expressions each of one contains two terms

تعلمت سابقاً كيفية ضرب حد جبري في حد جبري وكذلك ضرب مقدار جبري في مقدار جبري، الآن سوف تتعلم كيفية ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين ويمثلان مربع مجموع أو مربع فرق أو مجموع في فرق وذلك باستعمال الخواص التي درستها سابقاً من توزيع وابدال وترتيب.

مثال (1) جد مساحة الممر المحيط بالحديقة المربعة الشكل؟

مساحة الممر هي الفرق بين مساحتي المربع الكبير (الحديقة مع الممر) والمربع الصغير(الحديقة)

مساحة الحديقة مع الممر $(h+2)^2 = (h+2)(h+2) = h^2 + 2h + 2h + 4 = h^2 + 4h + 4$

مساحة الحديقة $h \times h = h^2$

مساحة الممر $(h^2 + 4h + 4) - h^2 = h^2 + 4h + 4 - h^2 = 4h + 4$

مثال (2) **جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:**

مربع مجموع حدين i) $(x + y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

مربع الفرق بين حدين ii) $(x - y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - xy - yx + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$

مجموع حدين × فرق بينهما iii) $(x + y)(x - y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$

مجموع حدين × مجموع حدين iv) $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$

مجموع حدين × فرق بين حدين v) $(x + 2)(x - 6) = x^2 - 6x + 2x - 12 = x^2 - 4x - 12$

فرق بين حدين × فرق بين حدين vi) $(x - 1)(x - 4) = x^2 - 4x - x + 4 = x^2 - 5x + 4$

مثال (3) **جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:**

i) $(z + 3)^2 = z^2 + 6z + 9$

ii) $(h - 5)^2 = h^2 - 10h + 25$

iii) $(2x - 7)(2x + 7) = 4x^2 - 49$

iv) $(3y + 1)(y + 2) = 3y^2 + 7y + 2$

v) $(v + \sqrt{2})(v - \sqrt{2}) = v^2 - 2$

vi) $(n - \sqrt{3})(5n - \sqrt{3}) = 5n^2 - 6\sqrt{3}n + 3$

[2-1-2] ضرب مقدار جبري من حدين في آخر من ثلاثة حدود

Multiplying algebraic expression from two terms by another from three terms

تعلمت سابقاً ضرب المقادير الجبرية من عدة حدود والآن سوف تتعلم حالات خاصة من ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود وذلك باستعمال الخواص التي درستها في التوزيع والإبدال والترتيب.

مثال (4) **جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:**

ناتج الضرب مجموع مكعبين

i) $(x+2)(x^2-2x+4) = x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8 = x^3+8 = x^3+2^3$

ناتج الضرب الفرق بين مكعبين

ii) $(y-3)(y^2+3y+9) = y^3+3y^2+9y-3y^2-9y-27 = y^3-27 = y^3-3^3$

مكعب مجموع حدين

iii) $(y+2)^3 = (y+2)(y+2)^2 = (y+2)(y^2+4y+4)$

$= y^3+4y^2+4y+2y^2+8y+8 = y^3+6y^2+12y+8$

مكعب الفرق بين حدين

iv) $(z-3)^3 = (z-3)(z-3)^2 = (z-3)(z^2-6z+9)$

$= z^3-6z^2+9z-3z^2+18z-27 = z^3-9z^2+27z-27$

مثال (5) **جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:**

i) $(2v+5)(4v^2-10v+25) = 8v^3-20v^2+50v+20v^2-50v+125 = 8v^3+125 = (2v)^3+5^3$

ii) $(\frac{1}{3}-z)(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}z+z^2) = \frac{1}{27}+\frac{1}{9}z+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{9}z-\frac{1}{3}z^2-z^3 = \frac{1}{27}-z^3 = (\frac{1}{3})^3-z^3$

iii) $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}) = x^3+\sqrt[3]{2}x^2+\sqrt[3]{4}x-\sqrt[3]{2}x^2-\sqrt[3]{4}x-\sqrt[3]{8}$

$= x^3+\sqrt[3]{2}x^2-\sqrt[3]{2}x^2+\sqrt[3]{4}x-\sqrt[3]{4}x-2 = x^3-2$

iv) $(x+\frac{1}{2})^3 = (x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})^2 = (x+\frac{1}{2})(x^2+x+\frac{1}{4}) = x^3+x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$

$= x^3+x^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8} = x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$

v) $(y-5)^3 = (y-5)(y-5)^2 = (y-5)(y^2-10y+25)$

$= y^3-10y^2+25y-5y^2+50y-125$

$= y^3-15y^2+75y-125$

تأكَّدْ من فهمِكَ

الأسئلة (1 - 7) مشابهة للمثالين (2،3)

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

1. $(x + 3)(x - 3)$
2. $(\sqrt{7} - h)^2$
3. $(z + \sqrt{5})(z - \sqrt{5})$
4. $(v + 5)(v + 1)$
5. $(x - 3)(x - 2)$
6. $(3x - 4)(x + 5)$
7. $(\frac{1}{3}y + 3)(\frac{1}{3}y + 2)$

الأسئلة (8 - 13) مشابهة للمثالين (4،5)

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

8. $(y+2)(y^2 - 2y+4)$
9. $(2z + 4)(4z^2 - 8z + 16)$
10. $(v - \sqrt[3]{3})(v^2 + \sqrt[3]{3}\, v + \sqrt[3]{9})$
11. $(\sqrt[3]{\frac{2}{7}} + m)(\sqrt[3]{\frac{4}{49}} - \sqrt[3]{\frac{2}{7}}\, m + m^2)$
12. $(x + 5)^3$
13. $(y - 4)^3$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

14. $(n - 6)^2$
15. $(y + 5)(y - 5)$
16. $(x + \sqrt{8})^2$
17. $(y + \sqrt{6})(y - \sqrt{6})$
18. $(8 + h)(3 + h)$
19. $(4 - y)(5 - y)$
20. $(2x - 3)(x + 9)$
21. $(z - 2\sqrt{7})(2z - \sqrt{7})$

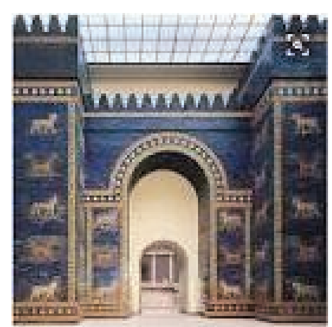
جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

22. $(x+6)(x^2 - 6x+36)$
23. $(y - 1)(y^2 + y + 1)$
24. $(z - 3)^3$
25. $(\frac{2}{3} - r)(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}r + r^2)$
26. $(x - \sqrt[3]{4})(x^2 + \sqrt[3]{4}\, x + \sqrt[3]{16})$
27. $(z - \sqrt{5})^3$
28. $(\sqrt[3]{\frac{1}{5}} + n)(\sqrt[3]{\frac{1}{25}} - \sqrt[3]{\frac{1}{5}}\, n + n^2)$
29. $(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \frac{1}{h})(\sqrt[3]{\frac{1}{81}} - \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\,\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2})$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



30 **مسبح:** يعد فندق بغداد أحد الفنادق السياحية المهمة في العاصمة العراقية بغداد، يبلغ طول المسبح فيه $(x + 9)$ أمتار وعرضه $(x + 1)$ متر، ومحاط بممرعرضه 1 متر. اكتب مساحة المسبح مع الممر بأبسط صورة بدلالة x .



31 **تأريخ:** تقع مدينة بابل شمال مدينة الحلة في العراق حيث عاش البابليون فيها منذ 3000 سنة قبل الميلاد تقريباً. وقد بنوا سنة 575م بوابة عشتار التي تعد البوابة الثامنة في سور مدينة بابل. رسم وائل لوحة فنية تمثل بوابة عشتار بالأبعاد $(y + 7)$ ، $(y - 4)$ سنتمترات. اكتب مساحة اللوحة التي رسمها وائل بأبسط صورة بدلالة y .



32 **أسماك زينة:** حوض سمك زينة مكعب الشكل طول حرفه $(v + 3)$ سنتمتر. اكتب حجم حوض الزينة بأبسط صورة بدلالة v.

فَكِّرْ

33 **تحدٍّ:** جد ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

$$(x + 1)^2 - (x - 2)^2$$

34 **أُصحِّحُ الخطأ:** كتبت نسرين ناتج ضرب المقدارين الجبريين كالآتي:

$$(\sqrt{5}\, h - 4)\,(h - 6) = 5\, h^2 + 10\, h - 24$$

حدّد خطأ نسرين وصحّحه.

35 **حسٌّ عدديٌّ:** أيّ العددين أكبر؟ العدد $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ أم العدد $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$. وضّح إجابتك.

أُكتبْ

ناتج ضرب المقدارين الجبريين: $(2z + \frac{1}{2})\,(2z - \frac{1}{2})$

الدرسُ [2-2]

تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر
Factoring the Algebraic Expression by using Greater Common Factor

فكرةُ الدرس
- تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر.

المفردات
- تحليل المقدار الجبري
- العامل المشترك الأكبر
- ثنائية الحد
- المعكوس
- التحقق من صحة الحل

تعلم

يعد نصب ساحة كهرمانة وسط بغداد من المعالم الحضارية المتميزة في العراق. يتوسط تمثالُ كهرمانة الساحة التي تقع في منطقة الكرادة ويبلغ نصف قطر قاعدة التمثال r متر ويحيط به حوض على شكل ممر دائري، إذا كان نصف قطر التمثال مع الحوض r + 2 متر، فجد مساحة الحوض.



[2-2-1] تحليل مقدار جبري باستعمال العامل المشترك الأكبر
Factoring the algebraic expression by using a greater common factor

تعلمت سابقاً كيفية إيجاد العامل المشترك الأكبر للأعداد وكذلك تعلمت كيفية تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF)، والآن سوف تزيد مهارتك في تعلم كيفية تحليل مقادير جبرية مكوّنة من حدين أو ثلاثة حدود باستعمال العامل المشترك الأكبر والتحقق من صحة الحل.

مثال (1) نصف قطر قاعدة تمثال كهرمانة r متر، ونصف قطر قاعدة التمثال مع الحوض r + 2 متر، جد مساحة الحوض .

مساحة التمثال $A_1 = r^2\pi$

مساحة التمثال مع الحوض $A_2 = (r+2)^2\,\pi = (r^2+4r+4)\pi = r^2\pi + 4r\pi + 4\pi$

مساحة الحوض $A = A_2 - A_1 = r^2\pi + 4r\pi + 4\pi - r^2\pi$

العامل المشترك الأكبر (4π) $= 4r\pi + 4\pi = 4\pi(r+1)$

مساحة الحوض المحيط بالتمثال $4\pi(r+1)$ متر مربع

مثال (2) **حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:**

i) $6x^3 + 9x^2 - 18x = 3x(2x^2 + 3x - 6)$ العامل المشترك الأكبر هو $3x$

التحقق:

للتحقق استعمل عملية ضرب المقادير الجبرية

$3x(2x^2 + 3x - 6) = 3x(2x^2) + 3x(3x) - 6(3x)$

$= 6x^3 + 9x^2 - 18x$

ii) $\sqrt{12}\,y^2z + \sqrt{2}(\sqrt{6}\,yz^2 - \sqrt{24}\,yz)$ فتح القوس مع تبسيط الجذور العددية

$= 2\sqrt{3}\,y^2z + 2\sqrt{3}\,yz^2 - 4\sqrt{3}\,yz$ العامل المشترك الأكبر هو $2\sqrt{3}\,yz$

$= 2\sqrt{3}\,yz(y + z - 2)$

التحقق:

للتحقق استعمل عملية ضرب المقادير الجبرية

$2\sqrt{3}\,yz(y+z-2) = 2\sqrt{3}\,y^2z + 2\sqrt{3}\,yz^2 - 4\sqrt{3}\,yz$

نلاحظ المتغيرات متساوية في الحدود مع المقدار الأصلي وكذلك المعاملات العددية لأن:

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}\ ,\ 2\sqrt{3} = \sqrt{2}\,\sqrt{6}\ ,\ 4\sqrt{3} = \sqrt{2}\,\sqrt{24}$

مثال (3) حلّل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

i) $5x(x+3) - 7(x+3) = (x+3)(5x-7)$ العامل المشترك الأكبر هو $(x+3)$

ii) $\frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{3}y^2(y-1) = (y-1)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y^2)$ العامل المشترك الأكبر هو $(y-1)$

iii) $\sqrt{3}v^2(z+2) - \sqrt{5}v(z+2) = (z+2)(\sqrt{3}v^2 - \sqrt{5}v)$ العامل المشترك الأكبر هو $(z+2)$

$= v(z+2)(\sqrt{3}v - \sqrt{5})$

[2-2-2] تحليل مقدار جبري باستعمال التجميع
Factoring algebraic expression by grouping

تعلمت في الفقرة السابقة كيفية تحليل المقدار الجبري المكون من حدين أو ثلاثة حدود باستعمال العامل المشترك الأكبر، والآن سوف تتعلم كيفية تحليل مقدار جبري مكون من أربعة حدود أو أكثر باستعمال تجميع الحدود بحيث يوجد للحدود التي يمكن تجميعها عوامل مشتركة.

مثال (4) حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

i) $4x^3 - 8x^2 + 5x - 10 = (4x^3 - 8x^2) + (5x - 10)$ تجميع الحدود التي لها عوامل مشتركة

$= 4x^2(x-2) + 5(x-2)$ تحليل الحدود المجمعة

$= (x-2)(4x^2+5)$ العامل المشترك الأكبر هو $(x-2)$

التحقق:

$(x-2)(4x^2+5) = x(4x^2+5) - 2(4x^2+5)$ استعمال خاصية التوزيع

$= 4x^3 + 5x - 8x^2 - 10 = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$ استعمال الضرب والترتيب

ii) $\sqrt{2}h^2t + \sqrt{3}t^2v - \sqrt{8}h^2v - \sqrt{12}v^2t = (\sqrt{2}h^2t - \sqrt{8}h^2v) + (\sqrt{3}t^2v - \sqrt{12}v^2t)$ تجميع الحدود

$= \sqrt{2}h^2(t-2v) + \sqrt{3}tv(t-2v)$ تحليل الحدود المجمعة

$= (t-2v)(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv)$ العامل المشترك الأكبر هو $(t-2v)$

التحقق:

$(t-2v)(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv) = t(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv) - 2v(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv)$ استعمال خاصية التوزيع

$= \sqrt{2}h^2t + \sqrt{3}t^2v - \sqrt{8}h^2v - \sqrt{12}v^2t$ استعمال الضرب والترتيب

مثال (5) حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

$14x^3 - 7x^2 + 3 - 6x = (14x^3 - 7x^2) + (3 - 6x)$ تجميع الحدود

$= 7x^2(2x-1) + 3(1-2x)$ تحليل الحدود المجمعة

$= 7x^2(2x-1) + 3(-1)(2x-1)$ استعمال المعكوس

$= 7x^2(2x-1) - 3(2x-1)$ كتابة $+3(-1)$ على شكل -3

$= (2x-1)(7x^2-3)$ العامل المشترك الأكبر هو $(2x-1)$

تأكَّدْ من فهمِكَ

حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر(GCF) وتحقق من صحة الحل:

الأسئلة (1 - 4) مشابهة للمثال (2)

1. $9x^2 - 21x$
2. $10 - 15y + 5y^2$
3. $14z^4 - 21z^2 - 7z^3$
4. $\sqrt{8}\, t^2r + \sqrt{2}\, (tr^2 - \sqrt{3}\, tr)$

حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

الأسئلة (5 - 8) مشابهة للمثال (3)

5. $3y\,(y - 4) - 5(\,y - 4)$
6. $\frac{1}{4}\,(t + 5) + \frac{1}{3}\, t^2\,(t + 5)$
7. $\sqrt{2}\, n\,(x + 1) - \sqrt{3}\, m\,(x + 1)$
8. $2x\,(x^2 - 3) + 7(x^2 - 3)$

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

الأسئلة (9 - 12) مشابهة للمثال (4)

9. $3y^3 - 6y^2 + 7y - 14$
10. $21 - 3x + 35x^2 - 5x^3$
11. $2r^2\, k + 3k^2\, v - 4r^2\, v - 6v^2\, k$
12. $3z^3 - \sqrt{18}\, z^2 + z - \sqrt{2}$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

الأسئلة (13 - 16) مشابهة للمثال (5)

13. $21y^3 - 7y^2 + 3 - 9y$
14. $\frac{1}{2}\, x^4 - \frac{1}{4}\, x^3 + 5 - 10x$
15. $6z^3 - 9z^2 + 12 - 8z$
16. $5t^3 - 15t^2 - 2t + 6$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر(GCF) وتحقق من صحة الحل:

17. $12y^3 - 21y^2$
18. $5t^3 + 10t^2 - 15t$
19. $6v^2\,(3v - 6) + 18v$
20. $\sqrt{12}\, n^3r + \sqrt{3}\, (nr^3 - \sqrt{2}\, nr)$

حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

21. $\frac{1}{7}\,(y + 1) + \frac{1}{3}\, y^2\,(y + 1)$
22. $\sqrt{3}\, k\,(x^2 + 1) - \sqrt{5}\, v\,(x^2 + 1)$

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

23. $5x^3 - 10x^2 + 10x - 20$
24. $49 - 7z + 35z^2 - 5z^3$
25. $3t^3\, k + 9k^2\, s - 6t^3\, s - 18s^2\, k$
26. $2y^4 - \sqrt{12}\, y^3 + \sqrt{2}\, y - \sqrt{6}$

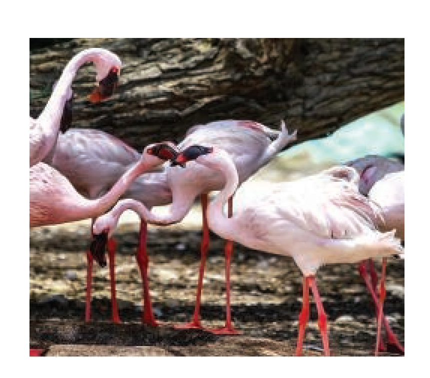
حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

27. $12x^3 - 4x^2 + 3 - 9x$
28. $4r^3 - 16r^2 - 3r + 12$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



29 **الطاقة الشمسية:** الألواح الشمسية هي المكون الرئيس في أنظمة الطاقة الشمسية التي تقوم بتوليد الكهرباء، وتصنع الخلايا من مواد شبه موصلة مثل السيليكون تمتص الضوء من الشمس. ما أبعاد اللوح الشمسي بدلالة x، إذا كانت المساحة $3x(x - 4) - 22(x - 4)$ أمتار مربعة؟



30 **طائر الفلامنكو:** طائر الفلامنكو، من جنس النحاميات وهو من الطيور المهاجرة التي تمتاز بشكلها الجميل ولونها الوردي، وتقطع مسافات بعيدة في أثناء موسم الهجرة السنوي مروراً بمنطقة الأهوار جنوبي العراق لتحصل على الغذاء من المسطحات المائية. إذا كانت مساحة المسطح المائي الذي غطّته طيور الفلامنكو في أحد الأهوار $4y^2 + 14y + 7(2y + 7)$ أمتار مربعة. فما شكل المسطح وما أبعاده بدلالة y ؟



31 **ساعة بغداد:** ساعة بغداد هي مبنى مرتفع تعلوه ساعة معلقة على برج لها أربعة أوجه، يقع المبنى ضمن منطقة ساحة الاحتفالات في بغداد وأُنشئت في سنة 1994م. ما نصف قطر الدائرة الداخلية للساعة بدلالة z إذا علمت انّ مساحتها $z^2\pi - 3z\pi - \pi(3z - 9)$ ؟

فكِّرْ

32 **تحدٍّ:** حلّل المقدار الآتي إلى أبسط صورة:

$$5x^5 y + 7y^3 z - 10x^5 z - 14z^2 y^2$$

33 **أُصحِّحُ الخطأ:** كتبت ابتسام ناتج تحليل المقدار التالي كما يأتي:

$$\sqrt{2}\, t^4 - \sqrt{24}\, t^3 + t^2 - \sqrt{12}\, t = (t + 2\sqrt{3})(\sqrt{2}\, t^2 - t)$$

اكتشف خطأ ابتسام وصحّحه.

34 **حسٌّ عدديٌّ:** ما العدد المجهول في المقدار $x^2 + 3x + 5x + 15 = (x + 3)(x + \square)$

أُكتبْ

ناتج طرح المقدار $(x + y)(x - y)$ من المقدار $(x + y)(x + y)$ بأبسط صورة.

الدرسُ [2-3]

تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات
Factoring the Algebraic Expression by using Special Identities

فكرةُ الدرس
- تحليل المقدار الجبري كفرق بين مربعين ومربع الكامل.

المفردات
- فرق بين مربعين
- مربع كامل
- الحد العام
- إكمال المربع
- الحد المفقود

تعلم

يعد ملعب الشعب الدولي في العاصمة العراقية بغداد من الملاعب المهمة في العراق إذ أُنشئَ عام 1966.
إذا كانت مساحة الساحة المخصّصة لكرة القدم التي تتوسط أرضيته يمثّلها المقدار $x^2 - 400$ متر مربع، فما أبعاد الساحة؟



[2-3-1] تحليل المقدار الجبري بالفرق بين مربعين
Factoring the algebraic expression by difference of two squares

تعرفت سابقاً كيفية إيجاد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر الأول يمثل مجموع حدين والآخر يمثل الفرق بينهما والناتج يمثل الفرق بين مربعيهما، والآن سوف تتعلم العملية العكسية لعملية الضرب وهي تحليل المقدار الجبري الذي على صورة فرق بين مربعين $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$.

المقدار $x^2 + y^2$ لايتحلل في هذه المرحلة.

مثال (1) جد أبعاد ساحة كرة القدم التي مساحتها $x^2 - 400$ متر مربع.

اكتب كل حد على هيئة مربع كامل: $x^2 - 400 = (x)^2 - (20)^2$

اكتب التحليل: $= (x + 20)(x - 20)$

القوس الأول: الجذر التربيعي للحد الأول + الجذر التربيعي للحد الثاني

القوس الثاني: الجذر التربيعي للحد الأول - الجذر التربيعي للحد الثاني

لذا طول ساحة كرة القدم $x + 20$ متراً وعرضها $x - 20$ متراً

مثال (2) حلّل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين:

i) $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

ii) $36y^2 - z^2 = (6y + z)(6y - z)$

iii) $49 - v^2 = (7 + v)(7 - v)$

iv) $2x^2 - z^2 = (\sqrt{2}x + z)(\sqrt{2}x - z)$

v) $5h^2 - 7v^2 = (\sqrt{5}h + \sqrt{7}v)(\sqrt{5}h - \sqrt{7}v)$

vi) $12 - t^2 = (2\sqrt{3} + t)(2\sqrt{3} - t)$

vii) $8x^3y - 2xy^3 = 2xy(4x^2 - y^2)$ التحليل باستعمال العامل المشترك

$= 2xy(2x + y)(2x - y)$ التحليل باستعمال الفرق بين المربعين

viii) $\frac{1}{16}z^4 - \frac{1}{81} = (\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{9})(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{9}) = (\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{9})(\frac{1}{2}z + \frac{1}{3})(\frac{1}{2}z - \frac{1}{3})$

[2-3-2] تحليل المقدار الجبري بالمربع الكامل
Factoring the algebraic expression by perfect square

تعلمت سابقاً كيفية إيجاد ناتج ضرب مربع مجموع حدين ومربع الفرق بين حدين وكان الناتج مؤلفاً من ثلاثة حدود، والآن سوف تتعلم العملية العكسية للضرب و هي تحليل مقدار مؤلف من ثلاثة حدود على صورة مربع كامل

$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

يكون المقدار الجبري $ax^2 \pm bx + c$ مربعاً كاملاً، إذا كان: $bx = \pm 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ حيث $a \neq 0$

مثال (3) حلل كل مقدار من المقادير التالية التي على صورة مربع كامل:

i) $x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2(x \times 3) + (3)^2$ اكتب الحد الأول والحد الأخير على هيئة مربع كامل

اكتب الحد الأوسط على هيئة ضعف جذر الحد الأول في جذر الحد الأخير

$= (x + 3)(x + 3)$ اكتب تحليل المقدار

$= (x + 3)^2$ التحليل النهائي على هيئة ^{2}(جذر الحد الأخير + جذر الحد الأول)

ii) $y^2 - 4y + 4 = (y)^2 - 2(y \times 2) + (2)^2$

$= (y - 2)^2$ لاحظ الإشارة بين العددين هي إشارة الحد الأوسط

iii) $16z^2 - 8z + 1 = (4z)^2 - 2(4z \times 1) + (1)^2 = (4z - 1)^2$

مثال (4) حدد أيّ مقدارمن المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلّله:

i) $x^2 + 10x + 25$

$(x)^2$, $(5)^2$

$2(x)(5) = 10x$ مربع كامل

$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

ii) $y^2 + 14y + 36$

$(y)^2$, $(6)^2$

$2(y)(6) = 12y \neq 14y$ ليست مربعاً كاملاً

iii) $4 - 37v + 9v^2$

$(2)^2$, $(3v)^2$

$-2(2)(3v) = -12v \neq -37v$

ليست مربعاً كاملاً

iv) $9h^2 - 6h + 3$

$(3h)^2$, $(\sqrt{3})^2$

$-2(3h)(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}h \neq -6h$

ليست مربعاً كاملاً

مثال (5) اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلّه:

لتصبح مربعاً كاملاً نطبق قانون الحد الأوسط $bx = \pm 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

i) $25x^2 - \ldots\ldots + 49$

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} \Rightarrow bx = 2\sqrt{(25x^2)(49)} \Rightarrow bx = 70x$

$\Rightarrow 25x^2 - 70x + 49 = (5x - 7)^2$

ii) $\ldots\ldots + 8x + 16$

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} \Rightarrow 8x = 2\sqrt{(ax^2)(16)} \Rightarrow 64x^2 = 4 \times 16 \times ax^2 \Rightarrow ax^2 = x^2$

$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

iii) $y^2 + 14y + \ldots\ldots$

$by = 2\sqrt{(ay^2)(c)} \Rightarrow 14y = 2\sqrt{(y^2)(c)} \Rightarrow 196y^2 = 4 \times y^2 \times c \Rightarrow c = 49$

$\Rightarrow y^2 + 14y + 49 = (y + 7)^2$

تأكَّدْ من فهمِكَ

حلل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للمثال (2)

1) $x^2 - 16$
2) $36 - 4x^2$
3) $h^2 - v^2$
4) $9m^2 - 4n^2$
5) $27x^3z - 3xz^3$
6) $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16}$

حلل كل مقدار من المقادير التالية كمربع كامل:

الأسئلة (7 - 10) مشابهة للمثال (3)

7) $y^2 - 8y + 16$
8) $9z^2 - 6z + 1$
9) $v^2 + 2\sqrt{3}\,v + 3$
10) $4h^2 - 20h + 25$

حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

الأسئلة (11 - 14) مشابهة للمثال (4)

11) $x^2 + 18x + 81$
12) $16 - 14v + v^2$
13) $64h^2 - 48h - 9$
14) $3 - 4\sqrt{3}\,t + 4t^2$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلّه:

الأسئلة (15 - 18) مشابهة للمثال (5)

15) $.... + 14y + 49$
16) $z^2 + 4z + ...$
17) $3 - ..... + 9x^2$
18) $4x^2 + 2\sqrt{5}\,x + ...$

تدربْ وحلّ التمرينات

حلِّل كل مقدار من المقادير الآتية إلى أبسط صورة:

19) $25 - 4x^2$
20) $y^2 - 121$
21) $x^2 - 16z^2$
22) $12 - 3t^2$
23) $8y^3x - 2x^3y$
24) $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{8}$
25) $\frac{1}{3}z^5 - \frac{1}{12}z$
26) $4x^2 + 20x + 25$
27) $3z^2 - 6z + 3$
28) $16n^2 + 8\sqrt{3}\,n + 3$
29) $4t^3 - 12t^2 + 9t$
30) $1 - 4m + 4m^2$

حدِّد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

31) $4x^2 + 18x + 16$
32) $y^2 + 10y + 25$
33) $49 - 7v + v^2$
34) $2h^2 - 12h - 18$
35) $4v^2 + 4v + 4$
36) $3 - 2\sqrt{3}\,z + z^2$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلله:

37) $y^2 + ... + 36$
38) $25 - 20x + ...$
39) $4v^2 + 8v + ...$
40) $5 - ..... + 16x^2$
41) $81 + 18z + ...$
42) $9h^2 + 6\sqrt{2}\,h + ...$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



43 **المئذنة الملوية:** وتقع منارة المئذنة الملوية في مدينة سامراء العراقية، وتعد إحدى معالم العراق المميزة بسبب شكلها الفريد، فهي إحدى آثار العراق القديمة المشهورة التي تعود لعصر حكم الدولة العباسية، وترتكز على قاعدة مربعة مساحتها $x^2 - 8x + 16$ متراً مربعاً. ما طول ضلع القاعدة التي تستند عليها الملوية بدلالة x ؟



44 **مزرعة أبقار:** لدى سعد مزرعة أبقار مربعة الشكل طول ضلعها x متر،وسَّعَها لتصبحَ مستطيلةَ الشكل فأصبحت مساحةُ المزرعة $x^2 - 81$ متراً مربعاً، ما طول المزرعة وعرضها بعد التوسعة بدلالة x ؟



45 **لوحة فنية:** رسمَ بشار لوحة فنية تمثل منطقة الأهوار في جنوب العراق، فكان المقدار $4x^2 - 8x + 9$ سنتمترات مربعة يمثل مساحة اللوحة الفنية. أَيمثّلُ مقدارُ مساحةِ اللوحة الفنية مربعاً كاملاً أم لا ؟

فَكِّرْ

46 **تحدٍّ:** هل المقدار الآتي يمثل مربعاً كاملاً أم لا؟ معلّلاً إجابتك.

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}$$

47 **أُصحِّحُ الخطأ:** قالت منتهى إنّ المقدار $(2x-1)(2x+1)$ هو تحليل للمربع الكامل $4x^2 - 4x + 1$.
حدّد خطأ منتهى وصحّحهُ.

48 **حسٌّ عدديٌّ:** أيمثّلُ المقدارُ $9x^2 + 12x - 4$ مربعاً كاملاً أم لا ؟ وضّح إجابتك.

أُكتبْ

تحليل للمقدار $4x^2 - 8x + 4$.

الدرسُ [2-4]

تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

Factoring the Algebraic Expression of three terms by Probe and Error

فكرةُ الدرس

• تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود باستعمال التجربة

المفردات

• الوسطان
• الطرفان
• الحد الأوسط

تعلم

الثور المجنّح الآشوري (شيدو لاماسو) هكذا يرد اسمه في الكتابات الآشورية، وأصلُ كلمة لاماسو هو من لاموو Lammu السومرية ويوجد تمثال له في متحف مدينة الموصل.
ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنّح التي مساحتها $x^2 + 10x + 21$ سنتمتراً مربعاً ؟



[2-4-1] تحليل المقدار الجبري x^2+bx+c
Factoring the algebraic expression x^2+bx+c

تعرفت سابقاً كيفية إيجاد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر كل منهما مكوّن من حدين:

i) $(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$, ii) $(x+3)(x-5) = x^2-2x-15$, iii) $(x-1)(x-4) = x^2-5x+4$

والآن سوف تتعلم العملية العكسية لعملية الضرب و هي تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود x^2+bx+c باستعمال التجربة.

ولتحليل المقدار الجبري، نجد عددين حقيقيين n , m بحيث $n + m = b$ ، $nm = c$ ونكتب

$$x^2 + bx + c = (x + n)(x + m)$$

مثال (1) ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنّح التي مساحتها $x^2 + 10x + 21$ سنتمتراً مربعاً ؟

لتحليل المقدار الجبري نتّبع الخطوات الآتية:

عوامل العدد 21	مجموع العاملين
(1) (21)	1 + 21 = 22
(3) (7)	3 + 7 = 10
(-3) (-7)	(-3)+(-7) = -10

حاصل ضرب الطرفين $+ 7x$
حاصل ضرب الوسطين $+ 3x$
بالجمع
الحد الأوسط $+10x$

$$x^2 +10x+ 21 = (x + 3)(x + 7)$$

(الطرفين ، الوسطين)

عرض اللوحة الفنية هو $x+3$ سنتمتر

طول اللوحة الفنية هو $x+7$ سنتمتر

ملاحظة: أُهملت عوامل العدد $(-7)(-3)=21$ لأنّ إشارة الحد الوسط موجبة.

مثال (2) حلل المقدار الجبري: $y^2 + y - 12$

عوامل العدد -12	مجموع العاملين
(1) (-12)	1 - 12 = -11
(12) (-1)	12 - 1 = 11
(2) (-6)	2 - 6 = -4
(6) (-2)	6 - 2 = 4
(3) (-4)	3 - 4 = -1
(4) (-3)	4 - 3 = 1

حاصل ضرب الطرفين $+ 4y$
حاصل ضرب الوسطين $- 3x$
بالجمع
الحد الأوسط $+ y$

$$y^2 + y - 12 = (y - 3)(y + 4)$$

مثال (3) **حلل المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:**

i) $z^2 - z - 6 = (z - 3)(z + 2)$ — الحد الأوسط $2z - 3z = -z$

ii) $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$ — الحد الأوسط $-6x - 3x = -9x$

iii) $y^2 + 6y - 27 = (y + 9)(y - 3)$ — الحد الأوسط $-3y + 9y = +6y$

iv) $x^2 - xy - 20y^2 = (x - 5y)(x + 4y)$ — الحد الأوسط $+4xy - 5xy = -xy$

v) $15 - 8z + z^2 = (5 - z)(3 - z)$ — الحد الأوسط $-5z - 3z = -8z$

[2-4-2] تحليل المقدار الجبري ax^2+bx+c وإن $a \neq 0$

Factoring the algebraic expression ax^2+bx+c and $a \neq 0$

الآن سوف تتعرف إلى كيفية تحليل مقدار جبري من ثلاثة حدود على الصورة ax^2+bx+c وإنّ $a \neq 0$

مثال (4) **حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:**

i) $\mathbf{6x^2 + 17x + 7}$

نجد عوامل العددين 7 ، 6 وكما يأتي:

$$6 = \begin{cases}(1)(6)\\(2)(3)\end{cases} \qquad , 7 = (1)(7)$$

$(1)(6) \qquad (1)(7) \Rightarrow (1)(1) + (6)(7) = 43$

$\qquad\qquad\qquad\qquad (1)(7) + (6)(1) = 13$

$(2)(3) \qquad (1)(7) \Rightarrow (2)(1) + (3)(7) = 23$

$\qquad\qquad\qquad\qquad (2)(7) + (3)(1) = 17$

حاصل ضرب الطرفين	$+14y$
حاصل ضرب الوسطين	$+3x$
الحد الأوسط	$+17x$

$6x^2 + 17x + 7 = (2x + 1)(3x + 7)$

ii) $\mathbf{7y^2 - 26y - 8}$

نجد عوامل العددين 7 ، 8 وكما يأتي:

$$8 = \begin{cases}(1)(8)\\(2)(4)\end{cases} \qquad , 7 = (1)(7)$$

$(1)(1) - (8)(7) = -55$

$(1)(7) - (8)(1) = -1$

$(2)(1) - (4)(7) = -26$

$(2)(7) - (4)(1) = 10$

حاصل ضرب الطرفين	$-28y$
حاصل ضرب الوسطين	$+2y$
الحد الأوسط	$-26y$

$7y^2 - 26y - 8 = (7y + 2)(y - 4)$

مثال (5) **حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:**

i) $3z^2 - 17z + 10 = (3z - 2)(z - 5)$ — الحد الأوسط $-15z - 2z = -17z$

ii) $4v^2 - v - 3 = (4v + 3)(v - 1)$ — الحد الأوسط $-4v + 3v = -v$

iii) $15 + 11h + 2h^2 = (5 + 2h)(3 + h)$ — الحد الأوسط $+5h + 6h = 11h$

iv) $6x^2 - 51x + 63 = 3(2x^2 - 17x + 21) = 3(x - 7)(2x - 3)$ — الحد الأوسط $-3x - 14x = -17x$

v) $3x^2 - 10xy + 3y^2 = (3x - y)(x - 3y)$ — الحد الأوسط $-9xy - xy = -10xy$

تأكَّدْ من فهمِكَ

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للأمثلة (3،1)

1. $x^2 + 6x + 8$
2. $1 - 2z + z^2$
3. $x^2 - 13x + 12$
4. $3 + 2z - z^2$
5. $x^2 - 2x - 3$
6. $15 - 8z + z^2$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

الأسئلة (7 - 14) مشابهة للمثالين (5،4)

7. $2x^2 + 5x + 3$
8. $3y^2 - 14y + 8$
9. $3x^2 - 10x + 8$
10. $8 - 25z + 3z^2$
11. $5y^2 - y - 6$
12. $6 + 29z - 5z^2$
13. $x^2 - 9xy + 20y^2$
14. $3y^2 - 19yx - 14x^2$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

الأسئلة (15 - 18) مشابهة للأمثلة (5،1)

15. $x^2 + 9x + 20 = (x \ldots 4)(x \ldots 5)$
16. $y^2 - 12y + 20 = (y \ldots 2)(y \ldots 10)$
17. $6x^2 - 7x + 2 = (2x \ldots 1)(3x \ldots 2)$
18. $20 - 7y - 3y^2 = (5 \ldots 3y)(4 \ldots y)$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

19. $x^2 + 9x + 14$
20. $y^2 - 5y + 6$
21. $24 - 2z - z^2$
22. $3 + 2z - z^2$
23. $x^2 - 2x - 3$
24. $36 - 15z + z^2$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

25. $2x^2 + 12x - 14$
26. $4y^2 - 6y + 2$
27. $10 + 9z - 9z^2$
28. $2x^2 + 3x + 1$
29. $13y^2 - 11y - 2$
30. $50 - 20z + 2z^2$
31. $30x^2 - xy - y^2$
32. $16y^2 - 2yx - 3x^2$
33. $6z^2 - 2zx - 4x^2$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

34. $x^2 + x - 20 = (x \ldots 4)(x \ldots 5)$
35. $x^2 - x - 56 = (x \ldots 7)(x \ldots 8)$
36. $35 + 3y - 2y^2 = (5 \ldots y)(7 \ldots 2y)$
37. $3x^2 - 5x + 2 = (x \ldots 1)(3x \ldots 2)$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



38 **قلعة الأخيضر:** قلعة الأخيضر هي قلعة أثرية تقع في محافظة كربلاء وسط العراق ولا تزال أطلال القلعة قائمةً إلى يومنا هذا، الأخيضر من الحصون الدفاعية الفريدة من نوعها ويحيط به سور عظيم مستطيل الشكل. ما أبعاد السور الخارجية بدلالة x، إذا كانت مساحة القلعة مع السور يمثّلها المقدار $6x^2 - 39x + 60$ متراً مربعاً؟



39 **ألعاب ترفيهية:** تعد أرجوحة ديسكفري من الألعاب الخطرة في مدينة الألعاب، ويمثل المقدار $5t^2 + 5t - 30$ مسار أرجوحة ديسكفري في مدينة الألعاب، إذ t يمثل زمنَ الحركة. وتحليل المقدار يساعد على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجحتُها في المرة الأولى. حلّل المقدار.



40 **مترو الأنفاق:** يعد مترو الأنفاق نظامَ سكك حديد تحت الأرض تسير عليه القطارات، وهو أحد وسائل النقل السريعة في المدن الكبيرة وذات الكثافة السكانية العالية، ويتألف كل قطار من عدة عربات، فإذا كان المقدار $14y^2 - 23y + 3$ يمثل مساحة أرضية العربة بالمتر المربع، فما أبعادها بدلالة y ؟

فَكِّرْ

41 **تحدٍّ:** حلّل المقدار الجبري الآتي إلى أبسط صورة:

$$4x^3 + 4x^2 - 9x - 9$$

42 **أُصحّحُ الخطأ:** حلّل سعد المقدارَ $6z^2 - 16z - 6$ كما يأتي:

$$6z^2 - 16z - 6 = (3z - 1)(2z + 6)$$

اكتشف خطأ سعد وصحّحه.

43 **حسٌّ عدديٌّ:** أيُمكن تحديدُ ما أذا كانت إشارات القوسين في تحليل المقدار $x^2 - 12x + 35$ مختلفة أم متشابهة ومن دون تحليل المقدار؟ وضّح إجابتَك.

أُكتبْ

الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليلُ المقدار الجبري صحيحاً:

$$6z^2 + 5z - 56 = (3z \ldots 8)(2z \ldots 7)$$

الدرسُ [2-5] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين
Factoring the Algebraic Expression sum of two cubes or difference between two cubes

فكرةُ الدرس
- تحليل المقدار الجبري من حدين الذي على صورة مجموع (فرق بين) مكعبين.

المفردات
- مجموع مكعبين
- فرق بين مكعبين

تعلم

مكعب روبيك هو لغز ميكانيكي ثلاثي الأبعاد اخترعه النحّات وأستاذ العمارة المَجَري إرنو روبيك عام 1974. ما مجموع حجمَي مكعّبَي روبك الأول طول حرفه 3dcm والثاني طول حرفه 4dcm ؟



[2-5-1] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين
Factoring the algebraic expression sum of two cubes

تعلّمتَ في الدرس الأول من هذا الفصل ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود وناتج ضربهما مقدار على صورة مجموع مكعبين مثل: $((x+2)(x^2-2x+4) = x^3+8 = x^3+2^3)$، والآن سوف تتعلم العملية العكسية وهي تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين:

$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$ حيث $x=\sqrt[3]{x^3}$, $y=\sqrt[3]{y^3}$

مثال (1) من تعلّم، ما مجموع حجمَي مكعّبَي روبك الأول طول حرفه 3 dcm والثاني طول حرفه 4 dcm ؟

حجم المكعب = الطول×العرض×الارتفاع = (طول الحرف)^3

قانون تحليل مجموع مكعبين

$v_1+v_2 = 3^3+4^3$

$= (3+4)(3^2-3\times4+4^2)$

$= 7(9-12+16) = 7\times13 = 91dcm^3$

مثال (2) حلّل كلَّ مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

i) $x^3+5^3 = (x+5)(x^2-5x+5^2) = (x+5)(x^2-5x+25)$

ii) $y^3+8 = y^3+2^3 = (y+2)(y^2-2y+4)$

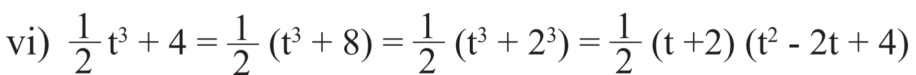
iii) $8z^3+27 = 2^3z^3+3^3 = (2z)^3+3^3 = (2z+3)(4z^2-6z+9)$

iv) $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{64} = \frac{1}{a^3}+\frac{1}{4^3} = (\frac{1}{a}+\frac{1}{4})(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{4a}+\frac{1}{16})$

v) $\frac{27}{x^3}+\frac{8}{125} = \frac{3^3}{x^3}+\frac{2^3}{5^3} = (\frac{3}{x})^3+(\frac{2}{5})^3 = (\frac{3}{x}+\frac{2}{5})(\frac{9}{x^2}-\frac{6}{5x}+\frac{4}{25})$



vi) $\frac{1}{2}t^3+4 = \frac{1}{2}(t^3+8) = \frac{1}{2}(t^3+2^3) = \frac{1}{2}(t+2)(t^2-2t+4)$



vii) $0.008+v^3 = (0.2)^3+v^3 = (0.2+v)(0.04-0.2v+v^2)$

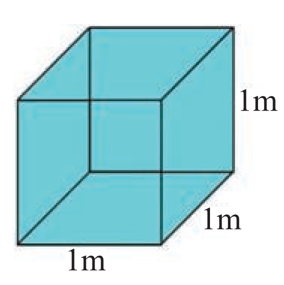
[2-5-2] تحليل المقدار الجبري فرق بين مكعبين
Factoring the algebraic expression difference between two cubes

تعلمت في الدرس الأول من هذا الفصل ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود وناتج ضربهما مقدار على صورة فرق بين مكعبين مثل: $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - 27 = x^3 - 3^3$، والآن سوف تتعلم العملية العكسية وهي تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة فرق بين مكعبين:

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + x y + y)$ حيث $y = \sqrt[3]{y^3}$, $x = \sqrt[3]{x^3}$

مثال (3) حوض مكعب الشكل طول حرفه 1m مملوء بالماء، أُفرِغَ الماءُ منه في حوض آخر أكبر منه مكعب الشكل طول حرفه 1.1m .

ما كمية الماء الإضافية التي نحتاج إليها ليمتلئَ الحوضُ الكبير؟



كمية الماء الإضافية اللّازمة = حجم المكعب الكبير - حجم المكعب الصغير

$v_2 - v_1 = (1.1)^3 - 1^3$

$= (1.1 - 1)((1.1)^2 + 1.1 \times 1 + 1^2)$ قانون تحليل الفرق بين مكعبين

$= 0.1(1.21 + 1.1 + 1) = 0.1 \times 3.31 = 0.331\ m^3$

مثال (4) حلّل كلَّ مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

i) $x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3^2) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

ii) $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y - 4)(y^2 + 4y + 16)$

iii) $27z^3 - 8 = 3^3z^3 - 2^3 = (3z)^3 - 2^3 = (3z - 2)(9z^2 + 6z + 4)$

iv) $\frac{1}{b^3} - \frac{1}{125} = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{5^3} = (\frac{1}{b} - \frac{1}{5})(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{25})$

v) $\frac{1}{3}t^3 - 9 = \frac{1}{3}(t^3 - 27) = \frac{1}{3}(t^3 - 3^3) = \frac{1}{3}(t - 3)(t^2 + 3t + 9)$

vi) $0.216 - n^3 = (0.6)^3 - n^3 = (0.6 - n)(0.36 + 0.6n + n^2)$

vii) $1 - 0.125z^3 = 1 - (0.5)^3z^3 = (1 - 0.5z)(1 + 0.5z + 0.25z^2)$

viii) $32 - \frac{1}{2}m^3 = \frac{1}{2}(64 - m^3) = \frac{1}{2}(4^3 - m^3) = \frac{1}{2}(4 - m)(16 + 4m + m^2)$

تأكَّدْ من فهمِكَ

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

الأسئلة (1 - 8) مشابهة للمثالين (1،2)

1. $y^3 + 216$
2. $x^3 + z^3$
3. $125 + 8z^3$
4. $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{8}$
5. $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64}$
6. $\frac{1}{3}t^3 + 9$
7. $0.125 + v^3$
8. $1 + 0.008z^3$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

الأسئلة (9 - 16) مشابهة للمثالين (3،4)

9. $a^3 - 8^3$
10. $8y^3 - 64$
11. $\frac{1}{c^3} - \frac{1}{8}$
12. $\frac{1}{2}v^3 - 4$
13. $0.125 - m^3$
14. $25 - \frac{1}{5}n^3$
15. $3b^3 - 81$
16. $0.216v^3 - 0.008t^3$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

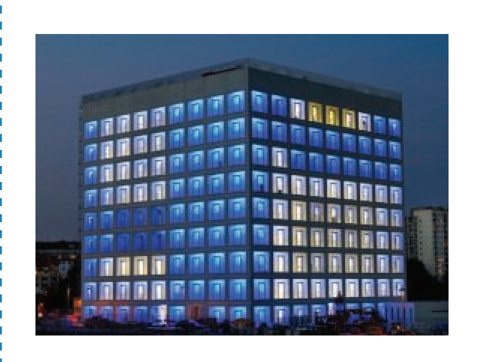
حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

17. $6^3 + x^3$
18. $27 + 64x^3$
19. $125y^3 + 1$
20. $\frac{1}{64} + \frac{8}{125}y^3$
21. $\frac{1}{b^3} + \frac{1}{8}$
22. $\frac{1}{5}v^3 + 25$
23. $0.027 + 27n^3$
24. $0.125x^3 + 0.008y^3$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

25. $y^3 - 64$
26. $27y^3 - 8$
27. $\frac{1}{x^3} - \frac{27}{8}$
28. $9 - \frac{1}{3}n^3$
29. $0.001 - v^3$
30. $4 - \frac{1}{2}t^3$
31. $25c^3 - \frac{1}{5}$
32. $0.001x^3 - 0.008y^3$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



33 **مكتبة:** مكتبة مدينة شتوتغارت هي واحدة من أجمل المكتبات في العالم وأفخمها وتقع في ألمانيا، كما أنها من أكثر المكتبات تماشياً مع متطلبات التعليم الحديثة. بناية المكتبة على شكل مكعب طول حرفه $\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2}$ متر. حلّل المقدار الذي يمثل طول حرفه.



34 **حوض سمك:** حوض سمك الزينة حجمه $25x^3$ متراً مكعباً، وُضِعَ في داخله حجر مكعب الشكل حجمه $\frac{1}{5}$ متر مكعب، مُلِئَ بالماء كاملاً. اكتب المقدار الذي يمثّل حجمَ الماء ثم حلّله ؟



35 **سكن:** بدأتِ المنازلُ تأخذ أشكالاً مختلفةً في التصميم مع تطور هندسة العمارة فصُمِّمَتْ هذه المنازل على شكل مكعبات. فإذا كان حجم المنزل الأول $\frac{8}{a^3}$ متر مكعب، وحجم المنزل الثاني $\frac{27}{b^3}$ متر مكعب. اكتب حجم المنزلين معاً ثم حلّل المقدار.

فَكِّرْ

36 **تحدٍّ:** حلل المقدار الجبري الآتي إلى أبسط صورة:

$$0.002z^3 - 0.016y^3$$

37 **أُصحِّحُ الخطأ:** حلّلت بشرى المقدار $8v^3 - 0.001$ كما يأتي:

$$8v^3 - 0.001 = (2v + 0.1)(4v^2 - 0.4v + 0.01)$$

اكتشف خطأَ بشرى وصحِّحهُ.

38 **حسٌّ عدديٌّ:** هل يمكن جمع العددين 27 ، 8 بطريقة تحليل مجموع مكعبين؟ وضّح إجابتك.

أُكتبْ

الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليلُ المقدار الجبري صحيحاً:

$$125 - x^3 = (5\ldots x)(25 \ldots 5x \ldots\ldots x^2)$$

الدرسُ [2-6]

تبسيط المقادير الجبرية النسبية
Simplifying Rational Algebraic Expressions

فكرةُ الدرس

- ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها وكتابتها بأبسط صورة.
- جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها وكتابتها بأبسط صورة.

المفردات

- النسبة ، الكسر



اشترى حسن مجموعةً من باقات الزهور بمبلغ $x^2 - x - 6$ دينار، فكانت كلفةُ باقة الزهور الواحدة عليه $2x - 6$ دينار.
اكتب نسبة ثمن الباقة الواحدة إلى الثمن الكلّي لباقات الزهور وبأبسط صورة.



[2-6-1] تبسيط ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها
Simplifying multiplying and dividing rational algebraic expressions

تعرّفتَ سابقاً إلى خواص الأعداد النسبية والحقيقية وتعلمت كيفيةَ تبسيط الجُمَل العددية باستعمال المضاعف المشترك الأصغر وترتيب العمليات، والآن سوف تتعلم كيفية تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على عامل مشترك، وتكرار الأمر بحيث لايبقى مجال لذلك، وعندئذٍ نقول إنّ المقدار على أبسط صورة (simplest form).

مثال (1) أُكتب نسبةَ ثمن باقة الزهور الواحدة إلى الثمن الكلّي للباقات بأبسط صورة.

حلّل البسط والمقام

$$\frac{\text{ثمن باقة الزهور}}{\text{ثمن الباقات الكلية للزهور}} = \frac{2x - 6}{x^2 - x - 6} = \frac{2(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على العامل المشترك

$$= \frac{2\cancel{(x - 3)}}{\cancel{(x - 3)}(x + 2)} = \frac{2}{x + 2}$$

مثال (2) أُكتب كلّ مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة:

i) $$\frac{x^2 - 4}{(x^2 - 4x + 4)} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{(x - 2)\cancel{(x - 2)}} = \frac{x + 2}{x - 2}$$

ii) $$\frac{5z + 10}{z - 3} \times \frac{z^3 - 27}{(z^2 + 6z + 8)} = \frac{5\cancel{(z + 2)}}{\cancel{z - 3}} \times \frac{\cancel{(z - 3)}(z^2 + 3z + 9)}{\cancel{(z + 2)}(z + 4)} = \frac{5(z^2 + 3z + 9)}{z + 4}$$

iii) $$\frac{16 - x^2}{3x + 5} \times \frac{(3x^2 + 2x - 5)}{(x^2 + 3x - 4)} = \frac{(4 + x)(4 - x)}{\cancel{(3x + 5)}} \times \frac{\cancel{(3x + 5)}\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x + 4)}\cancel{(x - 1)}} = 4 - x$$

اِضرب الأول في مقلوب الثاني

iv) $$\frac{8 + t^3}{4 - 2t + t^2} \div \frac{(2 + t)^3}{t^2 + 9t + 14} = \frac{8 + t^3}{4 - 2t + t^2} \times \frac{t^2 + 9t + 14}{(2 + t)^3}$$

حلّل البسطَ والمقامَ وقسّم على العامل المشترك

$$= \frac{\cancel{(2 + t)}\cancel{(4 - 2t + t^2)}}{\cancel{(4 - 2t + t^2)}} \times \frac{\cancel{(t + 2)}(t + 7)}{(2 + t)^3} = \frac{t + 7}{2 + t} = \frac{t + 7}{t + 2}$$

[2-6-2] تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها
Simplifying adding and subtracting rational algebraic expressions

تعلمت سابقاً كيفية تحليل المقادير الجبرية وكذلك كيفية إيجاد مضاعف مشترك أصغر (LCM: يمثل حاصل ضرب العوامل المشتركة بأكبر أس وغير المشتركة) عند تبسيط جمل عددية كسرية، والآن سوف تتعلم كيفية تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وطرحها وذلك بتحليل كل من بسط ومقام الكسر إلى أبسط صورة ثم إجراء عملية جمع وطرح المقادير الكسرية باستعمال المضاعف المشترك وتبسيط المقدار على أبسط صورة (simplest form).

مثال (3) أكتب المقدارَ الجبريَّ النسبيَّ بأبسطِ صورةٍ:

المضاعف المشترك الأصغر $(y + 2)$

$$\frac{y^2}{(y+2)} - \frac{4}{(y+2)}$$

تحليل البسط على صورة فرق بين مربعين

$$= \frac{y^2 - 4}{(y+2)}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على $y + 2$

$$= \frac{\cancel{(y+2)}(y-2)}{\cancel{(y+2)}} = y - 2$$

مثال (4) أكتب كلَّ مقدارٍ من المقاديرِ التاليةِ بأبسطِ صورةٍ:

بتحليل البسط والمقام

$$\text{i)}\ \frac{7x - 14}{x^2 - 4} + \frac{5}{(x+2)} = \frac{7(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{5}{x+2}$$

المضاعف المشترك الأصغر $(x + 2)$

$$= \frac{7}{x+2} + \frac{5}{x+2}$$

$$= \frac{7+5}{x+2} = \frac{12}{x+2}$$

المضاعف المشترك الأصغر $(2z - 5)(z + 3)$

$$\text{ii)}\ \frac{4z}{2z-5} - \frac{z}{z+3} = \frac{4z}{2z-5} \times \left(\frac{z+3}{z+3}\right) - \frac{z}{z+3} \times \left(\frac{2z-5}{2z-5}\right)$$

$$= \frac{4z(z+3) - z(2z-5)}{(2z-5)(z+3)} = \frac{2z^2 + 17z}{(2z-5)(z+3)} = \frac{z(2z+17)}{(2z-5)(z+3)}$$

$$\text{iii)}\ \frac{t^2 + 2t + 4}{t^3 - 8} + \frac{12}{3t - 6} = \frac{t^2 + 2t + 4}{(t-2)(t^2 + 2t + 4)} + \frac{12}{3(t-2)} = \frac{1}{(t-2)} + \frac{4}{(t-2)} = \frac{5}{(t-2)}$$

$$\text{iv)}\ \frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{v^2 - 16} = \frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{(v+4)(v-4)} = \frac{8(v-4) + 2(v+4) - 1}{(v+4)(v-4)}$$

$$= \frac{8v - 32 + 2v + 8 - 1}{(v+4)(v-4)} = \frac{10v - 25}{(v+4)(v-4)} = \frac{5(2v-5)}{(v+4)(v-4)}$$

تأكَّدْ من فهمِكَ

أُكتب كلَّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للمثالين (1،2)

1. $\frac{2z^2 - 4z + 2}{z^2 - 7z + 6}$

2. $\frac{y^3 + 27}{y^3 - 3y^2 + 9y}$

3. $\frac{5x + 3}{x + 3} \times \frac{x^2 + 5x + 6}{25x^2 - 9}$

4. $\frac{z^2 + 7z - 8}{z-1} \times \frac{z^2 - 4}{z^2 + 6z - 16}$

5. $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 4} \times \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6}$

6. $\frac{2y^2 - 2y}{y^2 - 9} \div \frac{y^2 + y - 2}{y^2 + 2y - 3}$

أُكتب كلَّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

الأسئلة (7 - 12) مشابهة للمثالين (3،4)

7. $\frac{2}{x^2 - 9} + \frac{3}{x^2 - 4x + 3}$

8. $\frac{2y^3 - 128}{y^3 + 4y^2 + 16y} - \frac{y - 1}{y}$

9. $\frac{z^2 + z + 1}{z^4 - z} - \frac{z + 3}{z^2 + 2z - 3}$

10. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} - 1$

11. $\frac{3}{z - 1} + \frac{2}{z + 3} + \frac{8}{z^2 + 2z - 3}$

12. $\frac{y - 3}{y - 1} + \frac{5y - 15}{(y - 3)^2} - \frac{3y + 1}{y^2 - 4y + 3}$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

أُكتب كلَّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

13. $\frac{x + 5}{12x} \times \frac{6x - 30}{x^2 - 25}$

14. $\frac{y + 3}{2y^2 + 6y + 18} \times \frac{y^3 - 27}{y^2 - 9}$

15. $\frac{3 - x}{4 - 2x} \times \frac{x^2 + x - 6}{9 - x^2}$

16. $\frac{y + 2}{2y - 4} \div \frac{y^3 + 8}{y - 2}$

17. $\frac{y^2 - 7y}{y^3 - 27} \div \frac{y^2 - 49}{y^2 + 3y + 9}$

18. $\frac{64 - z^3}{32 + 8z + 2z^2} \div \frac{(4 - z)^2}{16 - z^2}$

أُكتب كلَّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

19. $\frac{5}{x^2 - 36} - \frac{2}{x^2 - 12x + 36}$

20. $\frac{y^2 - y}{y^3 - 1} - \frac{1}{y^2 + y + 1}$

21. $\frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 2} + \frac{4 + 2x + x^2}{x^3 - 8}$

22. $\frac{y - 5}{y + 1} + \frac{y - 1}{y + 5} - \frac{25}{y^2 + 6y + 5}$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



23 **مكتبة:** إذا كان المقدار الجبري $x^2 - 4$ يمثل عدد الكتب العلمية في المكتبة، والمقدار الجبري $x^2 + x - 6$ يمثل عدد الكتب الأدبية فيها. اكتب نسبةَ الكتب العلمية إلى الكتب الأدبية بأبسط صورة.

5m

3m

x

24 **هندسة:** مستطيل أبعاده 3 ، 5 أمتار وُسِّعَ إلى مستطيل أكبر وذلك بإحاطته بممر عرضه x متر. اكتب المقدارالجبري الذي يمثل مجموع نسبتي طول المستطيل قبل التوسيع إلى طوله بعد التوسيع ونسبة عرض المستطيل قبل التوسيع إلى عرضه بعد التوسيع بأبسط صورة.



25 **ألعاب نارية:** المقدار الجبري $20 + 15t - 5t^2$ يمثل الارتفاع بالأمتار لقذيفة ألعاب نارية أُطلِقت من سطح بناية ارتفاعها 20 متراً، إذ t تمثل زمن وصول القذيفة بالثواني إلى الهدف. والمقدار الجبري $4 + 19t - 5t^2$ يمثل ارتفاع قذيفة أخرى أُطلِقت من سطح بناية ارتفاعها 4 أمتار. اكتب نسبة ارتفاع القذيفة الأولى إلى ارتفاع القذيفة الثانية بأبسط صورة.

فَكِّرْ

26 **تحدٍّ:** بسِّط المقدار الجبري الآتي إلى أبسط صورة:

$$\frac{y^2 - 5}{2y^3 - 16} \div \frac{y - \sqrt{5}}{2y^2 + 4y + 8}$$

27 **أُصحِّحُ الخطأ:** بسَّطَتْ سماح المقدار الجبري وكتبته بأبسط صورة كما يأتي:

$$\frac{z^2 - z - 30}{5 + z} \times \frac{2z + 12}{z^2 - 36} = 1$$

اكتشف خطأَ سماح وصحّحه.

28 **حسٌّ عدديٌّ:** ما ناتج جمع المقدارين الجبريين بدون استعمال الورقة والقلم؟ وضِّح إجابتك.

$$\frac{5}{x^2 - 49} + \frac{-4}{(x - 7)(x + 7)}$$

أُكتبْ

قيمة المقدار الجبري بأبسط صورة

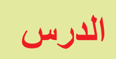
$$\frac{z^2 + z - 6}{2z^2 + 2z - 12} \div \frac{z^2 - 16}{2z + 8}$$

الدرسُ [2-7] خطة حل المسألة (الخطوات الأربع)

Problem Solving Plan (The Four Steps)

فكرةُ الدرس

• استعمال استراتيجية الخطوات الأربع لحل المسألة.



تعلم

تتخذ المباني الحديثة أشكالاً هندسيةً مختلفةً، ففي الصورة المجاورة فندق على شكل إسطوانة دائرية قائمة مغلقة من جوانبها بالزجاج. إذا كان نصف قطر قاعدة المبنى $x - 8$ أمتار وارتفاعه $x + 12$ متراً. ما المساحة الجانبية للفندق؟

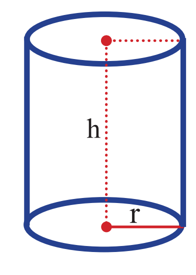


إِفهم

ما المعطيات في المسألة؟ مبنى الفندق على شكل أسطوانة، نصف قطر قاعدته $x - 8$ أمتار، وارتفاعه $x + 12$ متراً.

ما المطلوب من المسألة؟ إيجاد المساحة الجانبية للفندق.

خطّط



كيف تحلّ المسألة؟ بما أن بناية الفندق مشابهة للشكل الأسطواني الدائري القائم، لذا نطبق قانون المساحة الجانبية للأسطوانة القائمة وهي:

المساحة الجانبية = 2 × النسبة الثابتة × نصف قطر القاعدة × الارتفاع $(LA = 2\pi rh)$

حلّ

نصف قطر القاعدة = $x - 8$ متر

الارتفاع = $x + 12$ متر

عوّض في القانون بالمعطيات	$LA = 2\pi \times r \times h$
إستعمل ضرب المقادير الجبرية	$= 2\pi (x - 8)(x + 12)$
إستعمل خاصية التوزيع 6	$= 2\pi (x^2 + 4x - 96)$
المساحة الجانبية للفندق بالأمتار المربعة	$= 2\pi x^2 + 8\pi x - 192\pi$

تحقّق

استعمل تحليل المقادير الجبرية للتحقق من صحة الحل.

$LA = 2\pi x^2 + 8\pi x - 192\pi$

اخراج عامل مشترك	$= 2\pi (x^2 + 4x - 96)$
تحليل المقدار الجبري بالتجربة	$= 2\pi (x - 8)(x + 12)$

أي أنّ $r = x - 8$ ، $h = x + 12$ لذا فإنّ الحل صحيح.

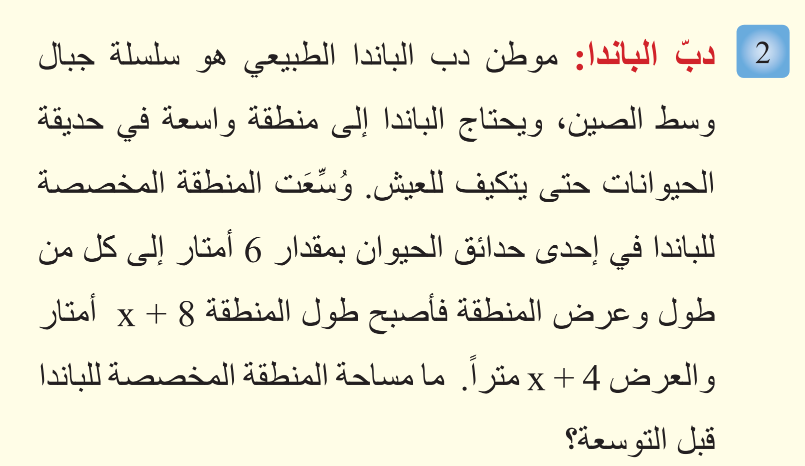
مسـائل Problems

حل المسائل التالية باستراتيجية (الخطوات الأربع)



1 **مدينة الألعاب:** بعض الألعاب في مدينة الألعاب تشغل مساحة أكبر من المساحة التي تشغلها وهي متوقفة. فلعبة الأرجوحة تشغل مساحة دائرية قطرها x متر عند الدوران، وعند توقفها فإن قطر المساحة التي تشغلها يقل بمقدار 8 أمتار. اكتب مقدار الفرق بين مساحتي التوقف والدوران للأرجوحة ثم حلّه.

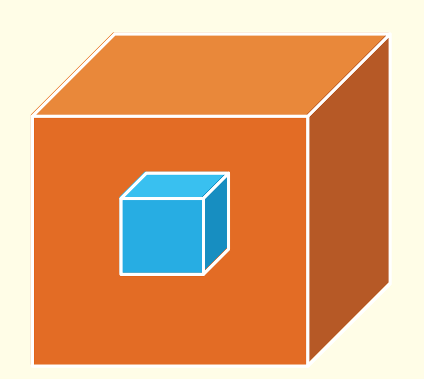




2 **دبّ الباندا:** موطن دب الباندا الطبيعي هو سلسلة جبال وسط الصين، ويحتاج الباندا إلى منطقة واسعة في حديقة الحيوانات حتى يتكيف للعيش. وُسِّعَت المنطقة المخصصة للباندا في إحدى حدائق الحيوان بمقدار 6 أمتار إلى كل من طول وعرض المنطقة فأصبح طول المنطقة $x + 8$ أمتار والعرض $x + 4$ متراً. ما مساحة المنطقة المخصصة للباندا قبل التوسعة؟



3 **كرةُ الثّلج:** كرة الثلج وهي كرة شفافة، تُصنع من الزجاج تنطوي على منظر طبيعي و تحتوي على الماء ويستفاد من الماء بوصفه وسطاً لسقوط الثلج. إذا كان نصف قطر كرة الثلج $3 - y$ سنتمتر. فما حجم الكرة؟



4 **هندسة:** صندوق مكعب الشكل طول ضلعه x سنتمتر، وُضِعَ داخله مكعب أصغر منه طول ضلعه 3 سنتمتر. حلّل المقدار الجبري الذي يمثل الفرق بين حجمَي المكعبين.

مراجعةُ الفصلِ Chapter Review

المفردات

English	عربي	English	عربي
perfect square	مربع كامل	square of sum	مربع مجموع
the lost term	الحد المفقود	square of difference	مربع فرق
the unknown term	الحد المجهول	cubic of sum	مكعب مجموع
the middle	الأوسط	cubic of difference	مكعب فرق
the parties	الطرفان	factoring	تحليل
the middle term	الحد الأوسط	algebraic expression	مقدار جبري
sum of two cubes	مجموع مكعبين	greater common factor	عامل مشترك أكبر
difference between two cubes	فرق بين مكعبين	least common multiple	مضاعف مشترك أصغر
numerator	بسط الكسر	grouping	تجميع
dominator	مقام الكسر	inverse	معكوس
simplest form	أبسط صورة	check	تحقق
divide	يقسم	correct solution	الحل الصحيح
multiple	مضاعف	difference between two squares	فرق بين مربعين
completing the square	إكمال المربع	inverse operation	عملية عكسية

الدرسُ [2-1] ضرب المقادير الجبرية

مثال: جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

i) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

ii) $(\sqrt{2} + z)(\sqrt{2} - z) = 2 - z^2$

iii) $(x - 7)(x^2 + 7x + 49) = x^3 - 343 = x^3 - 7^3$

تدريب: جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

i) $(z + 6)^2 =$ ....

ii) $(4x - 3)(4x + 3) =$ ....

iii) $(5 + z)(25 - 5z + z^2) =$ ....

الدرسُ [2-2] تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

مثال: حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر وتحقق من صحة الحل:

$4x^2 + 14x - 30 = 2(2x - 3)(x + 5)$

التحقق: $2(2x - 3)(x + 5) = 2(2x^2 + 7x - 15)$

$= 4x^2 + 14x - 30$

تدريب: حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر وتحقق من الحل:

$\sqrt{8}\, x^2 z + \sqrt{3}\,(\sqrt{6}\, xz^2 - \sqrt{12}\, xz) =$...

....

التحقق: ....

الدرسُ [2-3] تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

مثال1: حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية كفرق بين مربعين :

i) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

ii) $25y^2 - 49 = (5y + 7)(5y - 7)$

مثال2: حلل المقدار الجبري الآتي كمربع كامل:

$x^2 - 12x + 36 = (x)^2 - 2(x \times 6) + (6)^2$

$= (x - 6)(x - 6) = (x - 6)^2$

تدريب1: حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية كفرق بين مربعين:

i) $4x^2 - 49 =$ ....

ii) $3x^2 - y^2 =$ ....

تدريب2: حلل المقدار الجبري الآتي كمربع كامل:

$81z^2 - 18z + 1 =$ ....

الدرسُ [2-4] تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

مثال1: حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

i) $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$

الحد الأوسط $3x - 4x = -x$

ii) $y^2 - 8y + 15 = (y - 3)(y - 5)$

الحد الأوسط $-3x - 5x = -8x$

مثال2: حلِّل المقدار الجبري الآتي إلى أبسط صورة:

$5x^2 + 13x - 6 = (5x - 2)(x + 3)$

الحد الأوسط $15x - 2x = 13x$

تدريب1: حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

i) $y^2 - y - 20 =$ ....

الحد الأوسط ....

ii) $x^2 - 17x + 30 =$ ....

الحد الأوسط ....

تدريب2: حلِّل المقدار الجبري الآتي إلى أبسط صورة:

$7 - 23z + 6z^2 =$ ....

الحد الأوسط ....

الدرسُ [2-5] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو فرق بين مكعبين

مثال: حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

i) $x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 5^2)$

$= (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

ii) $27z^3 + 8 = (3z)^3 + 2^3$

$= (3z + 2)(9z^2 - 6z + 4)$

iii) $y^3 - 125 = y^3 - 5^3 = (y - 5)(y^2 + 5y + 25)$

تدريب: حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

i) $x^3 + 27 =$ ....

....

ii) $8z^3 + 125 =$ ....

....

iii) $x^3 - 64 =$ ....

....

iv) $\frac{1}{z^3} - \frac{1}{27} =$ ....

....

الدرسُ [2-6] تبسيط المقادير الجبرية النسبية

مثال1: اكتب كل مقدار بأبسط صورة:

i) $\frac{x + 3}{2x - 6} \times \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9}$

$= \frac{x + 3}{2(x - 3)} \times \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x^2 + 3x + 9} = \frac{x + 3}{2}$

ii) $\frac{125 + y^3}{25 - 5y + y^2} \div \frac{(5 + y)^3}{y^2 + 10y + 25}$

$= \frac{(5 + y)(25 - 5y + y^2)}{25 - 5y + y^2} \times \frac{(y + 5)^2}{(5 + y)^3} = 1$

iii) $\frac{3x - 15}{x^2 - 25} + \frac{2}{x + 5} = \frac{3(x - 5)}{(x + 5)(x - 5)} + \frac{2}{x + 5}$

$= \frac{3}{x + 5} + \frac{2}{x + 5}$

$= \frac{3 + 2}{x + 5} = \frac{5}{x + 5}$

تدريب: اكتب كل مقدار بأبسط صورة:

i) $\frac{z^2 - 4}{z + 2} \times \frac{z^2 + 9z + 20}{z^2 + 2z - 8} =$ ....

....

ii) $\frac{27 - x^3}{2x^2 + 6x + 18} \div \frac{(3 - x)^2}{x^2 - x - 6} =$ ....

....

iii) $\frac{4z}{2z - 5} - \frac{z}{z + 3} =$ ....

....

....

Chapter Test

اختبار الفصل

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

1 $(x+5)^2$ 2 $(v-\sqrt{2})(v+\sqrt{2})$ 3 $(2-x)(5-x)$ 4 $(2y-3)(y+9)$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

5 $(x+11)(x^2-11x+121)$ 6 $(\frac{1}{3}-y)(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}y+y^2)$

7 $(y-1)^3$ 8 $(z+\frac{1}{4})^3$

حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

9 $8x^2-12x$ 10 $7y^3+14y^2-21y$ 11 $\sqrt{18}\,z^3r+\sqrt{2}\,(zr^2-zr)$

حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

12 $\frac{2}{3}(y+5)+\frac{1}{3}y(y+5)$ 13 $\sqrt{5}\,z(z^2-1)-\sqrt{2}\,z^2(z^2-1)$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع:

14 $6x^4-18x^3+10x-30$ 15 $56-8y+14y^2-2y^3$

حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس:

16 $9x^3-6x^2+8-12x$ 17 $\sqrt{11}\,z^3-\sqrt{44}\,z^2+5(2-z)$

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية:

18 $16-x^2$ 19 $\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{27}$ 20 $\frac{1}{16}v-\frac{1}{2}v^4$

21 $8x^3-\frac{1}{125}$ 22 $81-18y+y^2$ 23 $7z^2-36z+5$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

24 $25x^2+30x+9$ 25 $49-14y+y^2$ 26 $4v^2+4\sqrt{5}\,v+5$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري ax^2+bx+c ليصبح مربعاً كاملاً وحلله:

27 $x^2+....+81$ 28 $36-12y+....$ 29 $7-....+4z^2$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية:

30 $x^2+7x+10$ 31 $x^2-5\sqrt{3}\,x+18$ 32 $2v^2+9v+7$

33 $32-16x+2x^2$ 34 $\frac{1}{4}y^2-2y+3$ 35 $12-7\sqrt{2}\,v+2v^2$

36 $8+27x^3$ 37 $125y^3-1$ 38 $\frac{1}{v^3}-\frac{8}{27}$

39 $1+0.125y^3$ 40 $z^3-0.027$ 41 $3-\frac{1}{9}v^3$

اكتب كل مقدار من المقادير التالية على أبسط صورة:

42 $\frac{27-8z^3}{4z^2-9}\div\frac{9+6z+4z^2}{9+6z}$ 43 $\frac{7}{x^2-25}-\frac{6}{x^2+10x+25}$

44 $\frac{y^2-1}{1-y^3}+\frac{1+y}{1+2y+y^2}$ 45 $\frac{z+3}{z+5}-\frac{z-5}{z-3}+\frac{1}{z^2+2z-15}$

الفصلُ 3

المعادلات

Equations

سافر باسل وسعد في رحلات سياحية عن طريق مطار بغداد الدولي فكانت مجموعة باسل تقل بـ 22 شخصاً عن مجموعة سعد، فإذا كان مجموع الأشخاص المسافرين 122 شخصاً، فيمكن حساب عدد الأشخاص لكل مجموعة وذلك بحل المعادلتين الخطيتين من الدرجة الأولى $x + y = 122$ ، $x - y = 22$ إذ المتغير x يمثل عدد الأشخاص في مجموعة سعد والمتغير y يمثل عدد الأشخاص في مجموعة باسل.

Pretest الاختبارُ القبليّ

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

1. $(y - 5)^2$
2. $(z + 2)(z - 2)$
3. $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$
4. $(4 - y)(6 - y)$
5. $(3z - 2)(z + 8)$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

6. $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
7. $(\frac{1}{2} - y)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}y + y^2)$

حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر(GCF) وتحقق من صحة الحل:

8. $5x^2 - 10x$
9. $9y^3 + 6y^2 - 3y$
10. $\sqrt{12}\,z^2 + \sqrt{3}\,z$

حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

11. $x(5 - x) - 3(5 - x)$
12. $\frac{1}{2}(y + 1) + \frac{1}{2}y(y + 1)$
13. $\sqrt{3}\,z(z - 1) - \sqrt{2}\,(z - 1)$

حلل المقدار باستعمال التجميع:

14. $6x^3 - 12x^2 + 5x - 10$
15. $9 - 18y + 7y^2 - 14y^3$
16. $\sqrt{2}\,z^4 - \sqrt{6}\,z^3 + z - \sqrt{3}$

حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس:

17. $4x^3 - 2x^2 + 3 - 6x$
18. $\frac{3}{4}y^3 - \frac{1}{4}y^2 + 4 - 12y$
19. $\sqrt{4}\,z^3 - \sqrt{25}\,z^2 + 3(5 - 2z)$

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية:

20. $y^2 - 25$
21. $\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{8}$
22. $36 - 12x + x^2$
23. $y^2 - 2y - 15$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

24. $16x^2 + 40x + 25$
25. $64 - 16y + y^2$
26. $z^2 - 6z - 9$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلله:

27. $x^2 + \ldots + 64$
28. $9 - 24y + \ldots$
29. $5 - \ldots + 4z^2$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية:

30. $18 - 3y - y^2$
31. $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 3$
32. $4 - 21x + 5x^2$
33. $1 + 27z^3$
34. $y^3 - 125$
35. $y^3 - \frac{1}{8}$
36. $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{64}$
37. $1 - 0.125z^3$

الدرسُ [3-1] حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين
Solving the system of two Linear Equations with two variables

فكرةُ الدرس
- حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً وبالتعويض وبالحذف .

المفردات
- معادلة خطية
- نظام المعادلات الخطية
- حل النظام



تعلم

لدى أحمد معمل تعليب التمور، بلغت تكاليف العلب وهي فارغة 100000 دينار، وملء العلبة الواحدة بالتمر يكلف 500 دينار، وتباع بـ 1000 دينار. ويرغب أحمد في معرفة عدد العلب التي عليه بيعها ليحقق ربحاً.

[3-1-1] حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً
Solving the system of two linear equations by graphic method

لتكن $L_1 : a_1x + b_1y = c_1$ ، $L_2 : a_2x + b_2y = c_2$ معادلتين من الدرجة الأولى (خطيتين) بمتغيرين x , y ، لحل هذا النظام بيانياً نتبع ما يأتي: 1) تمثيل كل من المستقيمين في المستوي الإحداثي. 2) لإيجاد إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين يُرسم عمودان من النقطة على المحورين الصادي والسيني فتكون نقطة التقاطع تمثل مجموعة الحل.

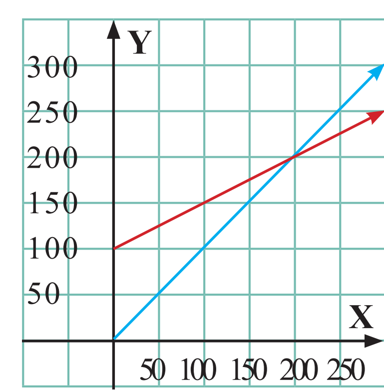
مثال (1) مِن تعلّم، جد عدد العلب التي يبيعها أحمد ليحقق ربحاً.

نفرض تكاليف الإنتاج بالمتغير y ، وعدد العلب المبيعة بالمتغير x ، وعليه:

معادلة تمثل تكاليف الإنتاج الكلية $y = 500\,x + 100000$ ..... (1)

معادلة تمثل القيمة الكلية للمبيعات $y = 1000\,x$ .... (2)

تدريج المحور y بألوف الدنانير



نمثل المعادلتين بيانياً وتحديد نقطة تقاطع المستقيمين (200،200) التي تمثل بيع 200 علبة، وتحقيق الربح يبدأ عندما يبيع أكثر من 200 علبة.

الزوج المرتب (200،200) الذي هو حل للمعادلتين يسمى حلاً للنظام.

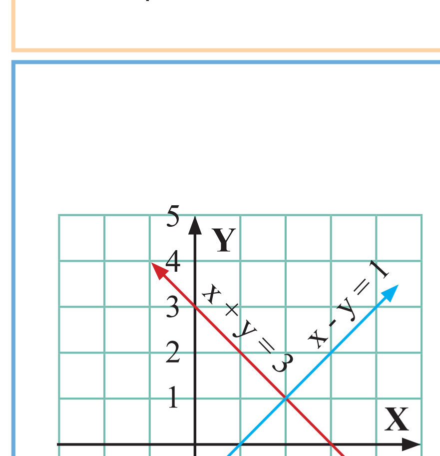
مثال (2) جد مجموعة الحل للنظام بيانياً .

$x - y = 1$ .... (1)

$x + y = 3$ .... (2)

نمثل المعادلتين بيانياً ونحدد نقطة تقاطع المستقيمين (2,1)

لتمثيل المعادلات بيانياً نأخذ نقاط التقاطع مع المحاور





المعادلة(1)

x	y = x - 1
0	-1
1	0

النقاط (1 ، 0) ، (0 ، -1)

المعادلة(2)

x	y = 3 - x
0	3
3	0

النقاط (3 ، 0) ، (0 ، 3)

مجموعة الحل للنظام هي $S = \{(2,1)\}$

للتحقق من صحة الحل نعوض عن قيمة المتغيرين x , y في كلا المعادلتين للحصول على عبارتين صائبتين.

التعويض بالمعادلة ....(1) $x - y = 1 \rightarrow 2 - 1 = 1 \rightarrow 1 = 1$

التعويض بالمعادلة ....(2) $x + y = 3 \rightarrow 2 + 1 = 3 \rightarrow 3 = 3$

[3-1-2] حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض
Solving the system of two linear equations by substitution method

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين x , y نقوم بتحويل إحدى المعادلتين إلى معادلة بمتغير واحد فقط وذلك بإيجاد علاقة بين x , y من إحدى المعادلتين وتعويضها في المعادلة الأخرى.

مثال (3) **جد مجموعة الحل للنظام باستعمال التعويض:**

i) $\left.\begin{array}{l} y = 4x \quad \ldots\ldots\ (1) \\ y = x + 6 \quad \ldots\ldots\ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow 4x = x + 6$

نعوض عن قيمة y من المعادلة (1) في المعادلة (2) لحل المعادلة ونجد قيمة المتغير x

$\Rightarrow 4x - x = 6 \Rightarrow x = 2$

$y = x + 6 \Rightarrow y = 2 + 6 \Rightarrow y = 8$ نعوض عن قيمة x بالمعادلة (2) لإيجاد قيمة المتغير y

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(2 , 8)\}$

ii) $\left.\begin{array}{l} x + 8y = 10 \ \ldots.\ (1) \\ x - 4y = 2 \ \ldots\ldots\ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2 + 4y$

نجد قيمة x من المعادلة (2) ونعوضها في المعادلة (1)

$2 + 4y + 8y = 10 \Rightarrow 12y = 8 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$ نعوض عن قيمة y بالمعادلة ...(1)

$x + 8y = 10 \Rightarrow x + 8 \times \frac{2}{3} = 10 \Rightarrow x = 10 - \frac{16}{3} \Rightarrow x = \frac{14}{3}$

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(\frac{14}{3} , \frac{2}{3})\}$

[3-1-3] حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف
Solving the system of two linear equations by elimination method

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين x , y وذلك بحذف أحد المتغيرين وبجعل معامل أحدهما متساوياً بالقيمة ومختلفاً بالإشارة في كلا المعادلتين.

مثال (4) **جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف:**

i) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 5 \quad \ldots\ldots.(1) \\ 3x - y = 1 \quad \ldots\ldots\ (2) \end{array}\right\}$

نضرب طرفي المعادلة ....(2) في العدد 2 ثم نجمعها مع المعادلة ...(1)

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y = 5 \quad \ldots\ldots\ldots(1) \\ 6x - 2y = 2 \quad \ldots\ldots\ldots.(2) \end{array}\right.$ بالجمع

$7x = 7 \Rightarrow x = 1$ نعوض عن قيمة x في إحدى المعادلتين (بأبسط معادلة)

$x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$ نعوض في المعادلة ....(1)

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(1 , 2)\}$

ii) $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 10 \quad \ldots\ldots.\ (1) \\ 2x + 3y = 7 \quad \ldots\ldots\ (2) \end{array}\right\}$

نضرب المعادلة ....(1) في العدد 2 والمعادلة ...(2) في العدد 3 ثم نطرح المعادلتين

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x + 9y = 21 \quad \ldots\ldots..(2) \\ \mp 6x \mp 8y = \mp 20 \quad \ldots..(1) \end{array}\right.$ بالطرح

$y = 1$ نعوض عن قيمة y في إحدى المعادلتين (قبل تغيير الإشارة)

$2x + (3 \times 1) = 7 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ نعوض في المعادلة ....(2)

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(2 , 1)\}$

تأكَّدْ من فهمِكَ

جد مجموعة الحل للنظام بيانياً:

الأسئلة (1 - 3) مشابهة للمثالين (1،2)

1. $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y - x = 3 \\ y + x = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 3 - x \end{cases}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي:

الأسئلة (4 - 6) مشابهة للمثال (3)

4. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$

6. $\begin{cases} y - 5x = 10 \\ y - 3x = 8 \end{cases}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي:

الأسئلة (7 - 9) مشابهة للمثال (4)

7. $\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 5x + 2y = -6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x - 4y = 24 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3y - 2x - 7 = 0 \\ y + 3x + 5 = 0 \end{cases}$

جد مجموعة الحل للنظام وتحقق من صحة الحل:

10. $\begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \\ y - \frac{x}{3} = 4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 0.2x - 6y = 4 \\ 0.1x - 7y = -2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = 6\frac{1}{4} \end{cases}$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

جد مجموعة حل للنظام بيانياً:

13. $\begin{cases} x - y = -4 \\ y + x = 6 \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = x - 4 \\ x = 2 - y \end{cases}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي:

15. $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x - y = 8 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي:

17. $\begin{cases} 3x = 22 - 4y \\ 4y = 3x - 14 \end{cases}$

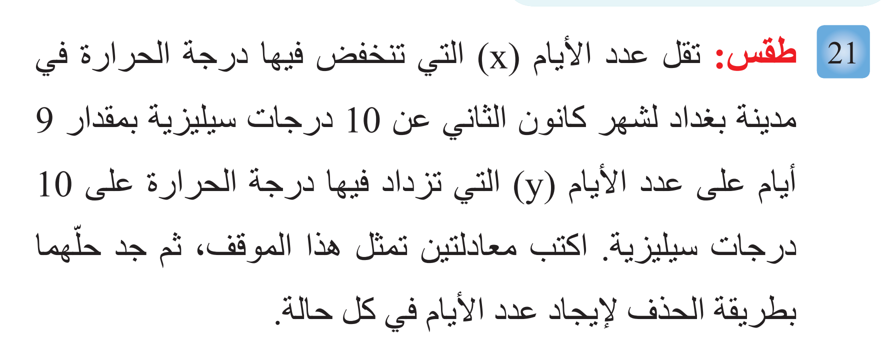
18. $\begin{cases} 5x - 3y = 6 \\ 2x + 5y = -10 \end{cases}$

جد مجموعة الحل للنظام وتحقق من صحة الحل:

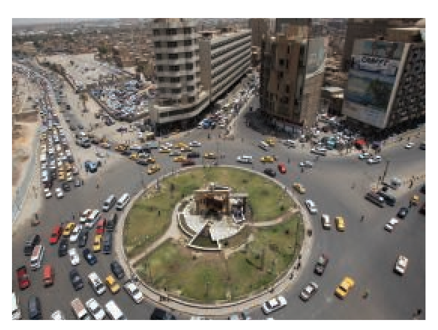
19. $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 0.2x - 3y = 3 \\ 0.1x - 6y = -3 \end{cases}$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



21 **طقس:** تقل عدد الأيام (x) التي تنخفض فيها درجة الحرارة في مدينة بغداد لشهر كانون الثاني عن 10 درجات سيليزية بمقدار 9 أيام على عدد الأيام (y) التي تزداد فيها درجة الحرارة على 10 درجات سيليزية. اكتب معادلتين تمثل هذا الموقف، ثم جد حلّهما بطريقة الحذف لإيجاد عدد الأيام في كل حالة.



22 **تجارة:** باع متجر 25 ثلاجة وغسالة، بسعر مليون دينار للثلاجة ونصف مليون دينار للغسالة. إذا كان ثمن هذه الأجهزة 20 مليون دينار فكم جهازاً باع من كل نوع؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلّهما بطريقة التعويض.



23 **حفلةُ تخرّج:** عمل سجاد وأنور حفلة بمناسبة تخرجهما من الكلية فكان عدد الأصدقاء الذين دعاهم سجاد أكثر بثلاثة من عدد الأصدقاء الذين دعاهم أنور. وكان عدد المدعوين 23 شخصاً، فكم شخصاً دعا كل منهما؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلّهما لإيجاد المطلوب.



فَكِّرْ

24 **تحدٍّ:** جد مجموعة الحل للنظام:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{6}x - \frac{1}{3}y &= 1\\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y &= 3\end{aligned}\right\}$$

25 **أُصحِّحُ الخطأ:** قال أحمد إن مجموعة حل للنظام:

$$\left.\begin{aligned}2x + 3y &= 6\\ 3x + 2y &= 1\end{aligned}\right\}$$

هي المجموعة $\{(\frac{5}{16}, \frac{5}{9})\}$

اكتشف خطأ احمد وصحّحه.

أُكتبْ

مجموعة حل للنظام:

$$\left.\begin{aligned}5x - 6y &= 0\\ x + 2y &= 4\end{aligned}\right\}$$

الدرسُ [3-2]

حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

Solving Quadratic Equations with one variable

فكرةُ الدرس

- حل المعادلات المؤلفة من حدين بتحليل الفرق بين مربعين.

المفردات

- معادلة
- درجة ثانية
- متغير واحد
- فرق بين مربعين

تعلم

تعد الزقورة من المعالم الحضارية في العراق إذ انها تقع في جنوب العراق.
رسَمَ باسل لوحةً جداريةً للزقورة مربعة الشكل مساحتها $9m^2$ على جدار إسمنتي. جد طول ضلع اللوحة .



[3-2-1] حل المعادلات بالتحليل فرق بين مربعين

Using difference between two squares to solve equations

المعادلة العامة من الدرجة الثانية بمتغير واحد $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $(a \neq 0)$ وإنّ $a,b,c \in R$.
وحلّها يعني إيجاد مجموعة قيم المتغير (x) التي تحقق المعادلة أي تجعلها عبارة صحيحة.
وسوف ندرس في هذا البند حل المعادلات المؤلفة من حدين باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين وخاصية الضرب الصفري.

مثال (1) اكتب معادلة تمثل مساحة اللوحة، ثم حلها لإيجاد طول ضلع اللوحة.

افرض طول ضلع اللوحة هو المتغير x والمعادلة التي تمثل مساحة اللوحة هي: $x^2 = 9$

التحليل باستعمال الفرق بين مربعين $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$

خاصية الضرب الصفري $\Rightarrow x + 3 = 0$ or $x - 3 = 0$

طول اللوحة الجدارية هو 3m $\Rightarrow (x = -3$ يهمل$)$ or $x = 3$

مثال (2) **حل المعادلة التالية باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل:**

التحليل باستعمال الفرق بين مربعين $16 - y^2 = 0 \Rightarrow (4 + y)(4 - y) = 0$

مجموعة الحل $4 + y = 0$ or $4 - y = 0 \Rightarrow y = -4$ or $y = 4 \Rightarrow S = \{-4, 4\}$

التحقق: كل قيمة في مجموعة الحل للمتغير y يجب أن تحقق المعادلة

بالتعويض عن $y = -4$: $L.S = 16 - y^2 = 16 - (-4)^2 = 16 - 16 = 0 = R.S$

بالتعويض عن $y = 4$: $L.S = 16 - y^2 = 16 - 4^2 = 16 - 16 = 0 = R.S$

مثال (3) **حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:**

i) $4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (2x + 5)(2x - 5) = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0$ or $2x - 5 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-5}{2}$ or $x = \frac{5}{2} \Rightarrow S = \{\frac{-5}{2}, \frac{5}{2}\}$

ii) $3z^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(z^2 - 4) = 0 \Rightarrow (z + 2)(z - 2) = 0$ بقسمة الطرفين على 3 ثم التحليل

$\Rightarrow z + 2 = 0$ or $z - 2 = 0 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$

iii) $2y^2 - 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 3 = 0 \Rightarrow (y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) \Rightarrow y = -\sqrt{3}$ or $y = \sqrt{3} \Rightarrow S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

iv) $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5}$ or $x = \sqrt{5} \Rightarrow S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

v) $(z + 1)^2 - 36 = 0 \Rightarrow (z + 1 + 6)(z + 1 - 6) = 0 \Rightarrow (z + 7)(z - 5) = 0 \Rightarrow S = \{-7, 5\}$

[3-2-2] حل المعادلات بخاصية الجذر التربيعي
Using square root property to solve the equations

تعلمت في البند السابق كيفية حل المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد بطريقة التحليل باستعمال الفرق بين مربعين، والآن سوف نجد مجموعة الحل للمعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد بطريقة خاصية الجذر التربيعي:

$\sqrt{x^2} = |x| \geq 0$

$25 = 5^2 \Rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{(5^2)} = |5| = 5$

$25 = (-5)^2 \Rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

وبصورة عامة إذا كان a عدد حقيقي موجب فإنّ: $x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

مثال (4) حل المعادلة التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي وتحقق من صحة الحل:

باستعمال قاعدة الجذر التربيعي $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$

مجموعة الحل للمعادلة $\Rightarrow S = \{3, -3\}$

التحقق: كل قيمة في مجموعة الحل للمتغير x يجب أن تحقق المعادلة

بالتعويض عن $x = 3$: $L.S = x^2 = 3^2 = 9 = R.S$

بالتعويض عن $x = -3$: $L.S = x^2 = (-3)^2 = -3 \times -3 = 9 = R.S$

مثال (5) حل المعادلة التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

i) $y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm\sqrt{36} \Rightarrow y = \pm 6 \Rightarrow S = \{6, -6\}$

ii) $z^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow z = \pm\frac{3}{5} \Rightarrow S = \{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\}$

iii) $x^2 + 81 = 0 \Rightarrow x^2 = -81$ لايوجد لها حل في الأعداد الحقيقية (لايوجد عدد حقيقي مربعه سالب)

iv) $3y^2 = 7 \Rightarrow y^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\}$

v) $4x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\}$

ملاحظة: إذا ربّعتَ طرفي معادلة صحيحة فإنّ المعادلة الناتجة تبقى صحيحة $(y = x \Rightarrow y^2 = x^2)$، مثلاً:

$\sqrt{x} = 5 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 5^2 \Rightarrow x = 25$

والعكس ليس صحيح أي أنّ: $x^2 = y^2 \not\Rightarrow x = y$

مثال (6) حل المعادلات التالية:

بتربيع طرفي المعادلة

i) $3\sqrt{x} = 18 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 6^2 \Rightarrow x = 36 \Rightarrow S = \{36\}$

ii) $\sqrt{y+8} = 3 \Rightarrow (\sqrt{y+8})^2 = 3^2 \Rightarrow y + 8 = 9 \Rightarrow y = 9 - 8 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow S = \{1\}$

iii) $\sqrt{5z} = 7 \Rightarrow (\sqrt{5z})^2 = 7^2 \Rightarrow 5z = 49 \Rightarrow z = \frac{49}{5} \Rightarrow S = \{\frac{49}{5}\}$

iv) $\sqrt{\frac{x}{13}} = 1 \Rightarrow (\sqrt{\frac{x}{13}})^2 = 1^2 \Rightarrow \frac{x}{13} = 1 \Rightarrow x = 13 \Rightarrow S = \{13\}$

تأكَّدْ من فهمِكَ

الأسئلة (1 - 3) مشابهة للمثال (2)

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل:

1. $x^2 - 16 = 0$
2. $81 - y^2 = 0$
3. $2z^2 - 8 = 0$

الأسئلة (4 - 9) مشابهة للمثال (3)

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

4. $4x^2 - 9 = 0$
5. $5y^2 - 20 = 0$
6. $(y + 2)^2 - 49 = 0$
7. $(3 - z)^2 - 1 = 0$
8. $x^2 - 3 = 0$
9. $y^2 - \frac{1}{9} = 0$

الأسئلة (10 - 15) مشابهة للمثال (4)

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

10. $x^2 = 64$
11. $z^2 = 7$
12. $2y^2 = \frac{49}{8}$
13. $6z^2 - 5 = 0$
14. $4(x^2 - 12) = 33$
15. $z^2 + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

الأسئلة (16 - 18) مشابهة للمثال (5)

حل المعادلات التالية:

16. $3\sqrt{x} = 15$
17. $\sqrt{y - 5} = 2$
18. $\sqrt{2z} = 6$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حل المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

19. $x^2 = 49$
20. $5y^2 - 10 = 0$
21. $3z^2 - 27 = 0$

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

22. $9x^2 - 36 = 0$
23. $7y^2 - 28 = 0$
24. $9(x^2 - 1) - 7 = 0$
25. $(y + 5)^2 - 64 = 0$
26. $x^2 - 2 = 0$
27. $y^2 - \frac{1}{36} = 0$



حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

28. $x^2 = 121$
29. $50 - 2y^2 = 0$
30. $x^2 = \frac{1}{64}$
31. $3y^2 = \frac{25}{3}$
32. $7(x^2 - 2) = 50$
33. $\frac{1}{5} y^2 = \frac{1}{3}$

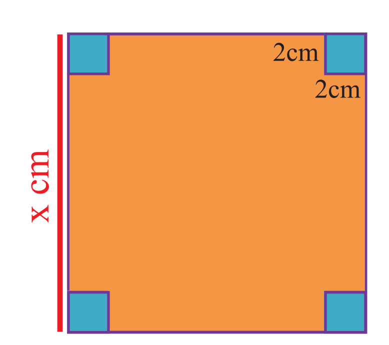
حل المعادلات التالية:

34. $6\sqrt{x} = 30$
35. $\sqrt{y - 9} = 4$
36. $\sqrt{4z} = 8$

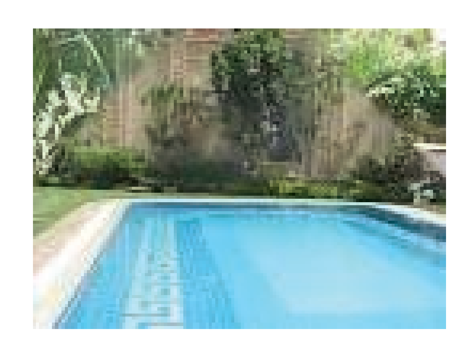
تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



37 **موكيت سجاد:** قطعة موكيت سجاد مستطيلة طولها 12m وعرضها 3m، قُطِّعَت إلى أجزاء لتغطية أرضية غرفة مربعة الشكل. أُكتب معادلة تمثّل المسألة ثم جد طول ضلع الغرفة.



38 **هندسة:** قطعة كارتون مربعة الشكل طول ضلعها x cm، قطعت أربعة مربعات متساوية من زواياها طول ضلع كل مربع 2cm، وثُنِيتْ لتكون صندوقاً دون غطاء على شكل متوازي سطوح مستطيلة حجمه $32\ cm^3$. أُكتب معادلة تمثّل المسألة ثم جد طول ضلع قطعة الكارتون الأصلية.



39 **نافورة:** صُمِّمَ حوض سباحة مربع الشكل طول ضلعه 3m في منتصف حديقة مربعة الشكل، فكانت المساحة المتبقية من الحديقة والمحيطة بالحوض $40m^2$، أُكتب معادلة تمثّل المسألة ثم جد طول ضلع الحديقة.

فكِّرْ

40 **تحدٍّ:** حل المعادلات التالية:

i) $9(x^2 + 1) = 34$ ii) $4x^2 - 3 = 0$

41 هل المجموعة المعطاة تمثل مجموعة الحل للمعادلة أم لا؟

i) $(2y + 1)^2 = 16$, $\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\}$ ii) $3x^2 - 7 = 0$, $\{\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{\sqrt{3}}\}$

42 **أُصحِّحُ الخطأ:** قال صلاح إنّ المجموعة $\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\}$ تمثل مجموعة الحل للمعادلة $5x^2 = 4$ اكتشف خطأ صلاح وصحّحه.

43 **حسٌّ عدديٌّ:** عدد صحيح موجب من رقم واحد لو أُنقِصَ من مربعه واحد لكان الناتج عدد من مضاعفات العشرة. ما العدد؟

أُكتبْ

مجموعة الحل للمعادلة:

$(8 - 3y)^2 - 1 = 0$

الدرسُ [3-3]

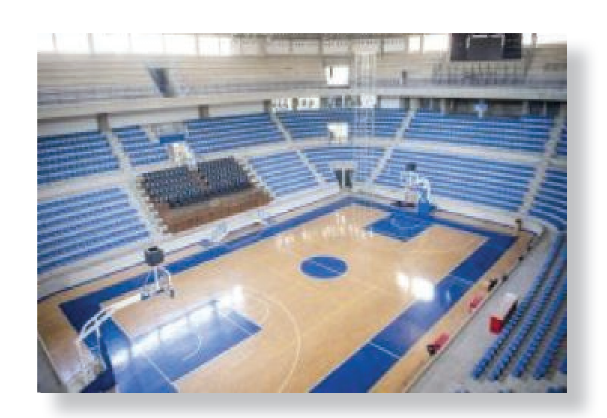
حل المعادلات التربيعية بالتجربة
Using Probe and Error to solve the Quadratic Equations

فكرةُ الدرس
- حل المعادلات من الدرجة الثانية المؤلفة من ثلاثة حدود بالتحليل بالتجربة.

المفردات
- المعادلة التربيعية
- التجربة

تعلم

إذا كان طول ملعب كرة السلة يزيد بمقدار 2m على ضعف عرضه، ومساحته $480m^2$.
فما بُعدَي الملعب؟



[3-3-1] حل المعادلة $x^2 + bx + c = 0$
Solving the equation $x^2 + bx + c = 0$

تعرفت سابقاً كيفية إيجاد تحليل مقدار جبري مؤلف من ثلاثة حدود بواسطة التجربة، والآن سوف تستعمل التحليل في حل المعادلات من الدرجة الثانية والمؤلفة من ثلاثة حدود $x^2 + bx + c = 0$ إذ b,c أعداد حقيقية. (تحليل المقدار إلى قوسين بإشارتين مختلفتين أو بإشارتين متشابهتين بحسب إشارة الحد المطلق والحد الأوسط).

مثال (1) إيجاد بُعدَي ملعب كرة السلة.

نفرض أن عرض الملعب بالمتغير x ، ولذا فإنّ طول الملعب يكون $2x + 2$

مساحة الملعب = الطول × العرض

$$x(2x+2) = 480 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 480 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 240 = 0$$

$$\Rightarrow (x+16)(x-15) = 0$$

الحد الأوسط $-15x + 16x = x$

$$\Rightarrow x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16$$

يهمل لأنه لايوجد طول بالسالب

$$\text{or } x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15$$

لذا عرض الملعب 15m وطوله $2 \times 15 + 2 = 32m$

مثال (2) **حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:**

i) $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ or } x = 4 \Rightarrow S = \{3, 4\}$

ii) $y^2 + 8y + 15 = 0 \Rightarrow (y+3)(y+5) = 0 \Rightarrow y = -3 \text{ or } y = -5 \Rightarrow S = \{-3, -5\}$

iii) $z^2 + z - 30 = 0 \Rightarrow (z+6)(z-5) = 0 \Rightarrow z = -6 \text{ or } z = 5 \Rightarrow S = \{-6, 5\}$

iv) $x^2 - 2x - 63 = 0 \Rightarrow (x-9)(x+7) = 0 \Rightarrow x = 9 \text{ or } x = -7 \Rightarrow S = \{9, -7\}$

v) ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 12؟

نفرض العدد x ، فيكون مربع العدد x^2، والجملة العددية التي تمثل المسألة هي:

$$x^2 - x = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ or } x = -3$$

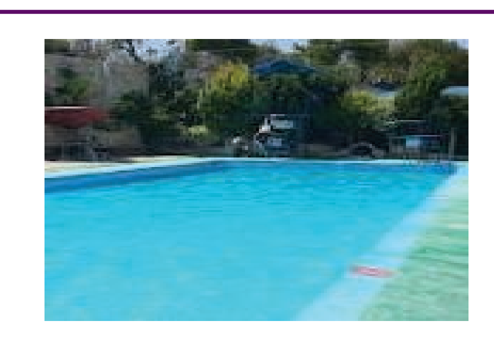
لذا العدد إما 4 أو -3

[3-3-2] حل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ وأن $a \neq 0$

Solving the equation $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$

تعلمت سابقاً حل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة التجربة وأن المتغير x^2 من دون معامل، أما الآن فستتعلم كيفية حل المعادلة نفسها ولكن مع وجود معامل للمتغير x^2.

مثال (3) مسبح يقل طوله عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار 1m.
فإذا كانت مساحة المسبح $140\ m^2$، جد أبعاده.



نفرض عرض المسبح بالمتغير x

لذا طول المسبح $3x - 1$

المعادلة التي تمثل المسألة هي $x(3x-1) = 140$، نحل المعادلة:

$$x(3x-1) = 140 \Rightarrow 3x^2 - x - 140 = 0$$

الحد الأوسط $-21x + 20x = -x$

$$\Rightarrow (3x+20)(x-7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+20 = 0 \Rightarrow x = -\frac{20}{3} \\ \text{or } x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

يهمل لأنه لايوجد طول بالسالب

لذا عرض المسبح 7m وطوله 20m

مثال (4) حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

i) $4y^2 - 14y + 6 = 0 \Rightarrow (4y-2)(y-3) = 0$

الحد الأوسط $-12y - 2y = -14y$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ \text{or } y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{\frac{1}{2}, 3\}$$

ii) $3x^2 + 18x - 21 = 0 \Rightarrow (3x-3)(x+7) = 0$

الحد الأوسط $21x - 3x = 18x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{or } x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases} \Rightarrow S = \{1, -7\}$$

iii) $20 + 13z + 2z^2 = 0 \Rightarrow (4+z)(5+2z) = 0$

الحد الأوسط $8z + 5z = 13z$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 + z = 0 \Rightarrow z = -4 \\ \text{0r } 5 + 2z = 0 \Rightarrow z = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \{-4, -\frac{5}{2}\}$$

iv) $9x^2 - 69x - 24 = 0 \Rightarrow 3(3x^2 - 23x - 8) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 23x - 8 = 0$

$$\Rightarrow (3x+1)(x-8) = 0$$

الحد الأوسط $-24x - x = -23x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ \text{or } x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \end{cases} \Rightarrow S = \{-\frac{1}{3}, 8\}$$

تأكَّدْ من فهمِكَ

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للمثال (2)

1. $x^2 - 9x + 18 = 0$
2. $x^2 - 4x - 32 = 0$
3. $y^2 + 48y - 49 = 0$
4. $y^2 + 9y - 36 = 0$
5. $x^2 - 3x + 2 = 0$
6. $y^2 - 8y - 33 = 0$

الأسئلة (7 - 9) مشابهة للمثال (1)

7. ما العدد الذي مربعه يزيد على ضعفه بمقدار 35 ؟
8. ما العدد الذي لو أُضيف 4 أمثاله إلى مربعه لكان الناتج 45 ؟
9. سجادة طولها يزيد على عرضها بمقدار 2m ومساحتها $48m^2$. ما أبعاد السجادة؟

حل المعادلات الآتية:

الأسئلة (10 - 14) مشابهة للمثال (4)

10. $15x^2 - 11x - 14 = 0$
11. $6 + 7x - 5x^2 = 0$
12. $42 + 64y + 24y^2 = 0$
13. $36 - 75x + 6x^2 = 0$
14. $70 - 33y + 2y^2 = 0$

السؤال (15) مشابه للمثال (3)

15. أرض مستطيلة الشكل يزيد طولها بمقدار 4m على عرضها. ما بُعدا الأرض إذا كانت مساحتها $60m^2$ ؟

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

16. $x^2 - 15x + 56 = 0$
17. $y^2 + 16y + 63 = 0$
18. $x^2 + 15x - 16 = 0$
19. $y^2 - y - 42 = 0$
20. $x^2 - 4x + 3 = 0$
21. $y^2 - 6y - 55 = 0$
22. قطعة معدن مستطيلة الشكل ينقص عرضها بمقدار 2m عن طولها. ما بُعدا القطعة المعدنية إذا كانت مساحتها $24m^2$ ؟
23. $12x^2 - 20x + 7 = 0$
24. $28 + 2z - 8z^2 = 0$
25. $81 - 9x - 12x^2 = 0$
26. $50z^2 + 10z - 4 = 0$
27. صالة طعام ينقص طولها عن مِثلَي عرضها بمقدار 3m ومساحتها $54m^2$. ما أبعاد الصالة؟

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

28. $x^2 - 4x + 3 = 0$
29. $y^2 - 9y - 36 = 0$
30. $4 - 26x + 12x^2 = 0$
31. $80 - 38y + 3y^2 = 0$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



32 **رياضة:** إذا كان طول صورة إعلانية لملعب كرة القدم يزيد بمقدار 4m على ضعف عرضها، فما بعدا الصورة إذا كانت مساحتها $160\ m^2$ ؟



33 **حقل نعام:** إذا كان طول حقل لتربية طيور النعام يقل بمقدار 4m عن ضعف عرضه، فإذا كانت مساحة الحقل $96m^2$ ، فهل يكفي سياج طوله 44m لتحويط الحقل؟



34 **إطار صورة:** اشترى سامر إطار لصورة، طوله ضعف عرضه. يحتاج سامر إلى تصغير الإطار بمقدار 2cm من طوله وعرضه ليصبح مناسباً للصورة، فما أبعاد الإطار الذي اشتراه سامر، إذا كانت مساحة الصورة $40cm^2$ ؟

فَكِّرْ

35 **تحدٍّ:** حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

i) $(x - 3)(x + 2) = 14$ ii) $3y^2 - 11y + 10 = 80$

36 **وضِّح:** هل أن المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة أم لا؟

i) $4x^2 + 2x = 30 \ ,\ \{\frac{-2}{5}, 3\}$ ii) $42 - 33y + 6y^2 = 0 \ ,\ \{2, \frac{7}{2}\}$

37 **أُصحِّحُ الخطأ:** قالت رنا إن مجموعة الحل للمعادلة $2x^2 - 34x + 60 = 0$ هي $\{3,15\}$.
أُحدِّد خطأ رنا وأصحِّحه.

أُكتبْ

معادلة تمثل المسألة التالية ثم جد حلها:
ما العدد الذي ينقص ضعفه عن مربعه بمقدار 35 ؟

الدرسُ [3-4]

حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل
Solving the Quadratic Equations by Perfect Square

فكرةُ الدرس
- حل المعادلات التربيعية بطريقة إكمال المربع.

المفردات
- الحد الأول
- الحد الأخير
- مربع كامل
- إكمال المربع

تعلم

الجاكوَر (Panthera onca) هو أحد السنَّوريات الكبرى المنتمية لجنس النمور، جد قيمة x من المعادلة $x^2 - 20x + 100 = 0$ والتي تمثّل طول ضلع المنطقة المربعة المحددة له بالمتر المربع في حديقة الحيوانات.



[3-4-1] حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل
Solving the quadratic equations by perfect square

تعرفت سابقاً كيفية تحليل مقدار جبري على هيئة مربع كامل، والآن سوف نستعمل هذا التحليل في حل معادلات بالتحليل بالمربع الكامل لإيجاد مجموعة الحل للمعادلة.

مثال (1) ما المقدار الذي يمثله طول ضلع المنطقة المربعة؟

لتحليل الطرف الأيسر من المعادلة نتأكد من أن المقدار يمثل مربعاً كاملاً $x^2 - 20x + 100 = 0$

مربع كامل لأنّ: الحد الأوسط = 2×(جذر الحد الأول×جذر الحد الأخير) $2(x \times 10)$

تحليل المقدار $x^2 - 20x + 100 = 0 \Rightarrow (x - 10)^2 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x - 10) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \\ \text{or } x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \end{cases}$$

لذا طول ضلع المنطقة المربعة المخصصة للنمر هو 10m

مثال (2) حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

i) $4x^2 + 20x + 25 = 0$

الحد الأوسط $2 \times (2x \times 5) = 20x$

نأخذ أحد العوامل المتكررة $\Rightarrow (2x + 5)^2 = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

ii) $y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$

الحد الأوسط $2 \times (y \times \frac{1}{2}) = y$

نأخذ أحد العوامل المتكررة $\Rightarrow (y - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

iii) $3 - 6\sqrt{3}z + 9z^2 = 0$

الحد الأوسط $2 \times (\sqrt{3} \times 3z) = 3\sqrt{3}z$

نأخذ أحد العوامل المتكررة $\Rightarrow (\sqrt{3} - 3z)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} - 3z = 0 \Rightarrow 3z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

[3-4-2] حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع
Solving quadratic equations by completing the square

الآن سوف نتعرف إلى كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة إكمال المربع:

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة $ax^2 + bx = -c$ ، حيث $a \neq 0$.
2) إذا كان $a \neq 1$ فتقسم المعادلة على a .
3) نضيف إلى طرفي المعادلة المقدار (مربع نصف معامل x).
4) نحلل الطرف الأيسر الذي أصبح مربعاً كاملاً بعد الخطوة 3 ، ونبسّط الطرف الأيمن.
5) نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم x .

مثال (3) **حل المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع:**

i) $x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 12$ نكتب المعادلة كما في الخطوة الأولى

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 12 + 4$ إضافة المقدار $(\frac{1}{2} \times -4)^2 = 4$ إلى طرفي المعادلة

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 16 \Rightarrow (x-2)^2 = 16$ نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$$\Rightarrow x - 2 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6 \\ \text{or } x - 2 = -4 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow S = \{6, -2\} \end{cases}$$

ii) $2y^2 - 3 = 3y \Rightarrow 2y^2 - 3y = 3$ نكتب المعادلة كما في الخطوة الأولى

$\Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}$ بقسمة طرفَي المعادلة على 2

$\Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{3}{2} + \frac{9}{16}$ إضافة المقدار $(\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{16}$ إلى طرفي المعادلة

$\Rightarrow (y - \frac{3}{4})^2 = \frac{33}{16}$ بتحليل الطرف الأيسر ونبسّط الطرف الأيمن للمعادلة

$\Rightarrow y - \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$ نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$$\Rightarrow \begin{cases} y - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3+\sqrt{33}}{4} \\ \text{or } y - \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3-\sqrt{33}}{4} \Rightarrow S = \left\{\frac{3-\sqrt{33}}{4}, \frac{3+\sqrt{33}}{4}\right\} \end{cases}$$

مثال (4) مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار 2cm ، قدّر طول المستطيل وعرضه بالتقريب لأقرب عدد صحيح إذا كانت مساحته $36cm^2$.

نفرض عرض المستطيل بالمتغير x فيكون طول المستطيل هو $x + 2$

والمعادلة التي تمثل المسألة: $x(x+2) = 36$

$\Rightarrow x^2 + 2x = 36$ نحل المعادلة بطريقة إكمال المربع

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 36 + 1$ نضيف $(\frac{1}{2} \times 2)^2 = 1$ إلى طرفي المعادلة

$\Rightarrow (x+1)^2 = 37 \Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{37} \Rightarrow x + 1 \approx \pm 6$ $\sqrt{37} \approx \sqrt{36}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 \approx 6 \Rightarrow x \approx 5 \\ \text{or } x + 1 \approx -6 \Rightarrow x \approx -7 \text{ يهمل} \end{cases}$$

لذا عرض المستطيل التقريبي 5cm وطوله 7cm

تأكَّدْ من فهمِكَ

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للمثال (2)

1. $x^2 + 12x + 36 = 0$
2. $y^2 - 10y + 25 = 0$
3. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
4. $y^2 + 2\sqrt{7}\ y + 7 = 0$
5. $x^2 + 16x = -64$
6. $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

الأسئلة (7 - 12) مشابهة للمثال (3)

7. $x^2 - 10x - 24 = 0$
8. $y^2 - 3 = 2y$
9. $4x^2 - 3x - 16 = 0$
10. $3y^2 + 2y = 1$
11. $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{1}{5}$
12. $5y^2 + 15y - 30 = 0$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

13. $x^2 + 24x + 144 = 0$
14. $y^2 - 20y + 100 = 0$
15. $y^2 + 4\sqrt{2}\ y + 8 = 0$
16. $7 - 2\sqrt{7}\ z + z^2 = 0$
17. $3y^2 + 36 - 12\sqrt{3}\ y = 0$
18. $9z^2 - 10z + \frac{25}{9} = 0$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

19. $y^2 + 2\sqrt{3}\ y = 3$
20. $4z^2 - 12z - 27 = 0$
21. $x^2 - 2x = 0$
22. $y^2 - 8y = 24$
23. $x^2 - \frac{2}{3}x = 4$
24. $8y^2 + 16y - 64 = 0$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:

25. $x^2 - 6x = 15$
26. $y(2y + 28) = 28$
27. $z^2 - 10z + 10 = 0$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



28 **مدينة بابل:** مدينة بابل باللّاتينية Babylon هي مدينة عراقية كانت تقع على نهر الفرات، وكانت عاصمة البابليين أيام حكم حمورابي سنة (1792 - 1750) قبل الميلاد. جد قيمة x من المعادلة $x^2 - 28x + 196 = 0$ والتي تمثل طول ضلع إحدى القاعات المربعة الشكل.



29 **دب الباندا:** المساحة المخصصة لدب الباندا في حديقة الحيوانات مستطيلة الشكل 126 متراً مربعاً، وعرضها يقل بمقدار 8 متر عن طولها.جد أبعاد المنطقة المخصصة للدب بالتقريب لأقرب عدد صحيح.



30 **حيتان:** تجنح بعض المجموعات من الحيتان إلى الشاطئ ولايوجد تفسير علمي لهذه الظاهرة، ويحاول حماة البيئة إرجاعها إلى البحر. حل المعادلة $x^2 + 20x = 525$ بطريقة إكمال المربع لإيجاد قيمة x التي تمثل عدد الحيتان التي جنحت إلى أحد شواطئ استراليا.

فكِّرْ

31 **تحدٍّ: حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:**

i) $4x(x - 6) = 27$ ii) $6y^2 - 48y = 6$

32 **أُصحِّحُ الخطأ:** حلّت سوسن المعادلة $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ بطريقة إكمال المربع وكتبَتْ مجموعةَ الحل للمعادلة بالشكل الآتي: $S = \{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\}$. اكتشف خطأ سوسن وصحّحه.

33 **حسٌّ عدديٌّ:** هل انّ مجموعة حل للمعادلة $y^2 - 4y + 4 = 0$ تحتوي على قيمتين متساويتين بالمقدار أحدهما سالبة والأخرى موجبة؟ وضّح إجابتك.

أُكتبْ

مجموعة الحل للمعادلة: $\frac{1}{81} - \frac{2}{9}z + z^2 = 0$

الدرسُ [3-5]

حل المعادلات بالقانون العام

Using General Law to solve the Equations

فكرةُ الدرس

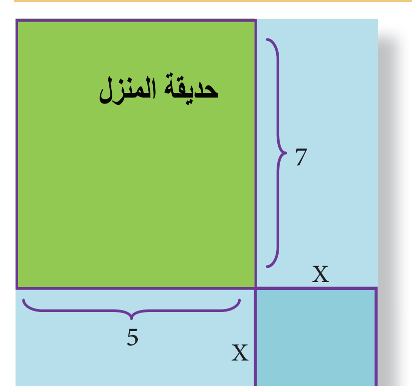
• حل المعادلات من الدرجة الثانية بالقانون العام.

المفردات

• معامل
• الحد المطلق
• القانون العام

تعلم

أريدَ رصفُ ممرٍّ على جانبَي حديقة منزل بالسيراميك طول الحديقة 7m وعرضها 5m، ومساحة الرصف $45m^2$. جد عرض الممر المطلوب رصفه بالسيراميك.



[3-5-1] حل المعادلات باستعمال القانون $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ وأن $a \neq 0$

Solving the equations by using the law $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ and $a \neq 0$

تعلمت في الدروس السابقة كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية بطرائق عدة، ولكن هنالك معادلات لايمكن حلها بالطرائق السابقة، فسوف نحلها بطريقة القانون العام (الدستور) وذلك لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية وكما يأتي:

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة العامة (القياسية) $ax^2 + bx + c = 0$.

2) نكتب قيم المعاملات: a معامل x^2، b معامل x مع إشارته، c الحد المطلق مع إشارته.

3) نعوض بالقانون العام لإيجاد قيمتي المتغير.

مثال (1) من فقرة تعلّم، ما عرض الممر المطلوب رصفه على جانبَي الحديقة؟

على فرض أن عرض الممر هو x ، فإنّ مساحة الجزء الأيمن من الممر = 7x ،

ومساحة الجزء الممر الأمامي = 5x ، ومساحة زاوية الممر = x^2 ومجموع مساحتَي الرصف $45m^2$.

المعادلة التي تمثل المسألة $x^2 + 7x + 5x = 45 \Rightarrow x^2 + 12x = 45$

وضع المعادلة بالصورة العامة $x^2 + 12x - 45 = 0$

تعين المعاملات والتعويض بالقانون العام $a = 1 \ , \ b = 12 \ , \ c = -45$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4\times1\times(-45)}}{2\times1} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 180}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{324}}{2} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm 18}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-12 + 18}{2} \Rightarrow x = 3 \\ \text{or } x = \frac{-12 - 18}{2} \Rightarrow x = -15 \end{cases}$$

عرض الممر 3m

يهمل غير ممكن

مثال (2) جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

$x^2 - 3x - 5 = 0 \ , \ a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \\ \text{or } x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \{\frac{3 + \sqrt{29}}{2}, \frac{3 - \sqrt{29}}{2}\}$$

[3-5-2] المقدار المميز ($\Delta = b^2 - 4ac$)

The discriminate ($\Delta = b^2 - 4ac$)

تعلمت في الجزء الأول من هذا الدرس كيفية حل المعادلة بالقانون العام لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة. والآن سوف نتطرق إلى مميز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ وهو $\Delta = b^2 - 4ac$، وإنّ نوع جذري المعادلة يتعين كما يأتي:

نوع الجذرين	$\Delta = b^2 - 4ac$
جذران حقيقيان نسبيان ....(المعاملات أعداد نسبية)..........	1) موجب ومربع كامل
جذران حقيقيان غير نسبيين	2) موجب وليس مربعاً كاملاً
جذران حقيقيان متساويان $(\frac{-b}{2a})$	3) صفر
جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \varnothing$)	4) سالب

مثال (3) حدّد جذري المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

i) $2x^2 + 3x - 2 = 0\ ,\ a = 2\ ,\ b = 3\ ,\ c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ المقدار المميز مربع كامل أي للمعادلة جذران نسبيان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \text{ or } x = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

ii) $y^2 - 4y - 9 = 0\ ,\ a = 1\ ,\ b = -4\ ,\ c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 16 - 4 \times 1 \times (-9) = 52$ المقدار المميز ليس مربعاً كاملاً لذا للمعادلة جذران غير نسبيين

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 36}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{2} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{13} \text{ or } x = 2 - \sqrt{13}$$

iii) $z^2 + 8z = -16 \Rightarrow z^2 + 8z + 16 = 0\ ,\ a = 1\ ,\ b = 8\ ,\ c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 64 - 4 \times 1 \times 16 = 0$ قيمة المقدار المميز صفر أي المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = -4$$

ممكن تطبيق القانون $(\frac{-b}{2a})$ مباشرة

iv) $x^2 - 2x + 10 = 0\ ,\ a = 1\ ,\ b = -2\ ,\ c = 10$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \times 1 \times 10 = -36$ قيمة المقدار المميز سالب ولذلك المعادلة ليس لها حل في R

مثال (4) ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k+1)x + 4 = 0$ متساويين؟ تحقّق من الإجابة.

يكون جذرا المعادلة متساويين عندما قيمة المقدار المميز Δ يساوي صفر.

نحدد قيم المعاملات $a = 1\ ,\ b = -(k+1)\ ,\ c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (k+1)^2 - 4 \times 1 \times 4 \Rightarrow \Delta = (k+1)^2 - 16$

نعوض عن قيمة المميز بصفر وذلك لتساوي جذري المعادلة $\Delta = 0 \Rightarrow (k+1)^2 - 16 = 0$

بجذر طرفي المعادلة $\Rightarrow (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (k+1)^2 = 16$

$$\Rightarrow k + 1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} k + 1 = +4 \Rightarrow k = 3 \\ \text{or } k + 1 = -4 \Rightarrow k = -5 \end{cases}$$

التحقق: نعوض بقيمة $k = 3$ بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

$x^2 - (k+1)x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$

نعوض بقيمة $k = -5$ بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

$x^2 - (k+1)x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$

تأكَّدْ من فهمِكَ

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للمثالين (1،2)

1. $x^2 - 4x - 5 = 0$
2. $y^2 + 5y - 1 = 0$
3. $3x^2 - 9x = -2$
4. $4y^2 + 8y = 6$
5. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
6. $2y^2 - 3 = -5y$

حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

الأسئلة (7 - 10) مشابهة للمثال (3)

7. $2x^2 + 3x = 5$
8. $3x^2 - 7x + 6 = 0$
9. $y^2 - 2y + 1 = 0$
10. $y^2 + 12 = -9y$

11. ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k + 2)x + 36 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.
12. ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2 + 25 = (k - 5)y$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة.
13. ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $z^2 + 16 = (k + 4)z$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.
14. بيِّن أنّ المعادلة $z^2 - 6z + 28 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

الأسئلة (11 - 14) مشابهة للمثالين (3،4)

تدربْ وحلّ التمرينات

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

15. $x^2 - 7x - 14 = 0$
16. $y^2 + 3y - 9 = 0$
17. $2x^2 - 8(3x + 2) = 0$
18. $2y^2 - 2 = -10y$

حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

19. $x^2 + 4x = 5$
20. $y^2 - 2y - 10 = 0$
21. $2x^2 - 5x + 7 = 0$
22. $y^2 - 14y + 49 = 0$

23. ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k + 6)x + 49 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.
24. ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2 + 36 = (k - 6)y$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة.
25. ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $z^2 + 81 = (k + 9)z$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.
26. بيِّن أنّ المعادلة $2z^2 - 3z + 10 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



27 **ألعابٌ نارية:** في إحدى المناسبات أُطلقت مجموعة من الألعاب النارية عمودياً في الهواء وصلت إلى ارتفاع 140m. احسب الزمن (t ثانية) الذي وصلت به إلى هذا الارتفاع من المعادلة التالية: $5t^2 + 60t = 140$



28 **تجارةٌ:** يحسب سامر سعرَ الكلفة للبدلة الرجالية الواحدة ثم يضيف عليها مبلغَ للربح ويبيعها للزبائن بمبلغ 120 ألف دينار، إذا كانت p في المعادلة $p^2 - 30p + 225 = 0$ تمثّل مبلغَ ربح سامر في البدلة الواحدة بأُلوف الدنانير، فما سعرُ كلفة البدلة الواحدة؟

فَكِّرْ

29 **تحدٍّ:** حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

ii) $3y^2 - 6y - 42 = 0$ i) $x^2 + 8x = 10$

30 **أُصحّحُ الخطأ:** قال سعد إن المعادلة $2x^2 - 3x - 9 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية. اكتشف خطأَ سعد وصحّحه.

31 **حسٌّ عدديٌّ:** استعملت مروةُ المقدارَ المميّزَ لكتابة جذرَي المعادلة $z^2 - 8z + 16 = 0$ دون تحليلها. فسِّر كيف استطاعت مروة كتابة جذرَي المعادلة.

أُكتبْ

نوع جذري المعادلة $x^2 + 100 = 20x$ باستعمال المقدار المميز دون حلها.

الدرسُ [3-6] حل المعادلات الكسرية

Solving the Rational Equations

فكرةُ الدرس

- حل المعادلات الكسرية من الدرجة الثانية.

المفردات

- بسط الكسر
- مقام الكسر
- معادلة كسرية

تعلم

إذا كان ثمن شراء التحفية الواحدة بدلالة المتغير x هو $2x + 3$ ألف دينار وثمن شراء ست تحفيات أيضاً بدلالة x هو $x^2 + 3x - 1$ ألف دينار، فإذا كانت نسبة ثمن تحفية واحدة إلى ثمن ثلاث تحفيات $\frac{1}{3}$، فما ثمن شراء تحفية واحدة؟



تعرفت سابقاً إلى كيفية تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على عامل مشترك، والآن سوف نستعمل تحليل المقادير الجبرية لحل المعادلات الكسرية التي في مقامها متغير وذلك بالتخلص من الكسور ثم حلها بإحدى الطرائق التي تعلمتها سابقاً.

مثال (1) اكتب ثمن شراء التحفية الواحدة.

تبسيط الكسر بضرب الطرفين في الوسطين

$$\frac{\text{ثمن تحفية واحدة}}{\text{ثمن ثلاث تحفيات}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x - 1)} = \frac{1}{3}$$

تبسيط المعادلة لتحليلها

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 1 = 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \\ \text{or } x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

يهمل لايوجد سعر بالسالب

إذن ثمن شراء تحفية واحدة هو $(2x + 3 = 13)$ ثلاثة عشر ألف دينار

مثال (2) **جد مجموعة الحل للمعادلة التالية، ثم تحقق من صحة الحل:**

نضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر (LCM) للتخلص من الكسور

$$5x + \frac{x - 2}{3x} = \frac{2}{3}$$

تبسيط المعادلة

$$3x(5x) + 3x\left(\frac{x - 2}{3x}\right) = 3x\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 15x^2 + x - 2 = 2x \Rightarrow 15x^2 - x - 2 = 0$$

تحليل بالتجربة

$$\Rightarrow (3x + 1)(5x - 2) = 0$$

مجموعة الحل

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{3} \\ \text{or } 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{\frac{-1}{3}, \frac{2}{5}\right\}$$

التحقق: نعوض بالمعادلة الأصلية عندما $: x = \frac{-1}{3}$

$$L.S = 5\left(\frac{-1}{3}\right) + \frac{\frac{-1}{3} - 2}{3 \times \frac{-1}{3}} = \frac{-5}{3} + \frac{-1}{3} + 2 = \frac{-5}{3} + \frac{1}{3} + 2 = \frac{-5 + 1 + 6}{3} = \frac{2}{3} = R.S$$

كذلك من السهل التحقق عندما $x = \frac{2}{5}$ (تُترك للطالب)

تعلمت سابقاً كيفية تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وطرحها وذلك بتحليل كل من بسط ومقام الكسر إلى أبسط صورة ثم إجراء عملية جمع وطرح المقادير الكسرية باستعمال المضاعف المشترك الأصغر وتبسيط المقدار على أبسط صورة (simplest form)، والآن سوف تستعمل ذلك في حل المعادلات الكسرية لإيجاد مجموعة حلول المعادلة الكسرية .

مثال (3) **جد مجموعة الحل للمعادلة:**

$$\frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$$

نحلل المقامات إلى أبسط صورة ممكنة

$$\Rightarrow \frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{18}{(x-3)(x+3)}$$

بضرب طرفي المعادلة في LCM (x-3) (x+3)

$$\Rightarrow x(x+3) + 4x(x-3) = 18$$

تبسيط المعادلة وحلها لإيجاد قيم المتغير

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 4x^2 - 12x - 18 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 9x - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (5x+6)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{5} \text{ or } x = 3$$

ملاحظة: يجب استبعاد القيم التي تجعل مقام أيّ حد كسري من حدود المعادلة الأصلية صفراً لأنه يؤدي إلى القسمة على صفر وهذا غير جائز.

ولذا نستبعد $x = 3$ من الحل لأن $(\frac{x}{x-3} = \frac{3}{0})$، ويكون الحل فقط هو $x = -\frac{6}{5}$

التحقق: نعوض بالمعادلة الأصلية $x = -\frac{6}{5}$ ونرى إن كان طرفا المعادلة متساويين أم لا؟

$$L.S = \frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{6}{5}-3} + \frac{4 \times -\frac{6}{5}}{-\frac{6}{5}+3} = \frac{6}{21} - \frac{8}{3} = -\frac{50}{21}$$

$$R.S = \frac{18}{x^2-9} = \frac{18}{(-\frac{6}{5})^2-9} = \frac{18}{\frac{36}{25}-9} = -\frac{450}{189} = -\frac{50}{21}$$

$L.S = R.S$

لذا قيمة $x = -\frac{6}{5}$ تحقق المعادلة

مثال (4) **جد مجموعة الحل للمعادلة:**

$$\frac{2}{x+2} - \frac{x}{2-x} = \frac{x^2+4}{x^2-4}$$

قبل ضرب طرفي المعادلة في LCM للمقامات نحاول

تحليل مقام الكسر للطرف الأيمن وتغير $2 - x = -(x - 2)$

باستعمال المعلومة $a - b = -(b - a)$

$$\Rightarrow \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}$$

بضرب طرفي المعادلة في LCM $(x+2)(x-2)$

$$\Rightarrow 2(x-2) + x(x+2) = x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 2x - 4 + x^2 + 2x - x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

عند التعويض عن $x = 2$ بالمعادلة الأصلية نحصل على عملية قسمة على صفر وهذا غير جائز $(\frac{x}{2-x} = \frac{2}{0})$

لذلك المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، أي مجموعة الحل في R هي مجموعة خالية (∅).

تأكَّدْ من فهمِك

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للمثالين (1،2)

1. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{4x^2}$

2. $\frac{y}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{10y}$

3. $\frac{x+4}{2} = \frac{-3}{2x}$

4. $\frac{y+1}{y^2} = \frac{3}{4}$

5. $\frac{9x-14}{x-5} = \frac{x^2}{x-5}$

6. $\frac{1}{y^2-6} = \frac{2}{y+3}$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية:

الأسئلة (7 - 10) مشابهة للمثالين (3،4)

7. $\frac{y-4}{y+2} - \frac{2}{y-2} = \frac{17}{y^2-4}$

8. $\frac{9}{x^2-x-6} - \frac{5}{x-3} = 1$

9. $\frac{12}{y^2-16} + \frac{6}{y+4} = 2$

10. $\frac{2x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{8+7x+3x^2}{x^2-1}$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

11. $\frac{4}{6x^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$

12. $\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} = 0$

13. $\frac{9x+22}{x^2} = 1$

14. $\frac{9}{(y+2)^2} = \frac{3y}{y+2}$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية:

15. $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x-3} = 1$

16. $\frac{y-5}{y+5} - \frac{y+5}{y-5} = \frac{4y^2-24}{y^2-25}$

17. $\frac{6-x}{x^2+x-12} - \frac{2}{x+4} = 1$

18. $\frac{4+8y}{y^2-9} + \frac{6}{y-3} = 3$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



19 رياضة: إذا أراد راكبُ دراجةٍ قطعَ مسافةِ 60 km بين مدينتين A,B بسرعة معينة، ولو زادت سرعته بمقدار 10 km/h لَتمكَّنَ من قطع هذه المسافة بزمن يقل ساعة واحدة عن الزمن الأول. جد سرعته أولاً.



20 نقل مسافرين: تقطعُ طائرةُ الخطوط الجوية العراقية المسافةَ 350 km بين مدينة بغداد وأربيل بسرعة معينة، ولو زادت سرعة الطائرة بمقدار 100 km/h لَتمكَّنَت الطائرةُ من قطع المسافة بزمن يقل 12 دقيقة عن الزمن الأول. جد سرعة الطائرة التقريبية أولاً.

21 سباق: شاركَ نوفل في سباق ثلاثي، وتضمن السباق السباحة وركوب الدراجة والجري، واستغرق ساعتين لإنهاء السباق كما موضح في الجدول المجاورعلى اعتبار x تعبر عن معدل سرعته في السباحة. جد معدل سرعته التقريبية في سباق السباحة.

	المسافة km	السرعة km/h	الزمن
السباحة	$d_s = 1$	x	t_s
ركوب الدراجة	$d_b = 20$	$5x$	t_b
الجري	$d_r = 4$	$x + 4$	t_r

ملاحظة: استعمل معادلة الزمن الإجمالي الذي استغرقه نوفل في السباق بدلالة سرعته في السباحة هو:

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

فَكِّرْ

22 تحدٍّ: جد مجموعة الحل للمعادلة التالية:

$$\frac{3}{x+5} + \frac{4}{5-x} = \frac{x^2 - 15x + 14}{x^2 - 25}$$

23 أُصحِّحُ الخطأ: استعملَ نميرُ المقدارَ المميز لبيان جذور المعادلة:

$$\frac{2}{x-7} \times \frac{1}{x-1} = 1$$

فقال نمير انّ للمعادلة جذران نسبيان حقيقيان. اكتشف خطأ نمير وصحِّحه.

أُكتبْ

مجموعة الحل في مجموعة الأعداد الحقيقية :

$$\frac{1}{x+6} - \frac{5}{x-6} = 2$$

الدرسُ [3-7] خطة حل المسألة (كتابة معادلة)

Problem Solving Plan (Writing Equation)

فكرةُ الدرس

• استعمال استراتيجية كتابة معادلة لحل المسألة.

تعلم

تقطع باخرة شحن مسافة 240 km بين الميناء A والميناء B بسرعة معينة، ولو زادت سرعتها 10 km/h لتمكنت من قطع المسافة بزمن يقل ساعتين عن الزمن الأول. جد سرعة الباخرة أولاً.



اِفهم

ما المعطيات في المسألة؟ باخرة شحن تقطع المسافة 240km بين المدينة A والمدينة B بسرعة معينة، وتقطعها بزمن يقل ساعتين عن الزمن الأول في حالة زادت سرعتها بمقدار 10 km/h .

ما المطلوب من المسألة؟ إيجاد سرعة الباخرة أولاً.

خطّط

كيف تحلّ المسألة؟ أكتب معادلة تمثل المسألة ثم أحلها لإيجاد سرعة الباخرة أولاً.

حلّ

نفرض أن سرعة الباخرة الأولى $v =$ ، الزمن الأول $= \frac{240}{v}$

لذا سرعتها الثانية $= v + 10$ ، الزمن الثاني $= \frac{240}{v+10}$

الزمن الأول - الزمن الثاني يساوي 2

$$\frac{240}{v} - \frac{240}{v+10} = 2$$

بضرب طرفي المعادلة في LCM $v(v + 10)$

$$240\,v + 2400 - 240\,v = 2v(v + 10)$$

$$2400 = 2v^2 + 20v$$

$$v^2 + 10v - 1200 = 0 \Rightarrow (v + 40)(v - 30) = 0$$

$$\Rightarrow v + 40 = 0 \Rightarrow v = -40$$ يهمل

$$\text{or } v - 30 = 0 \Rightarrow v = 30\ km/h$$ سرعة الباخرة أولاً



تحقّق

زمن الباخرة الأولى $\frac{240}{v} = \frac{240}{30} = 8h$

زمن الباخرة الثانية $\frac{240}{v+10} = \frac{240}{40} = 6h$

زمن الباخرة الثانية أقل من زمن الباخرة الأولى بمقدار ساعتين $(8 - 6 = 2h)$ ، لذا الحل صحيح.

Problems مسائل

حل المسائل التالية باستراتيجية (كتابة معادلة)



1 **نافورة:** زُرِعَت منطقةٌ مربعة الشكل طول ضلعها 4m بالورد وسط حديقة فندق مربعة الشكل، فكانت مساحة المنطقة المتبقية من الحديقة المحيطة بها $84\ m^2$. ما طول ضلع الحديقة؟



2 **أسد بابل:** وهو تمثال لأسد عُثِرَ عليه في مدينة بابل الأثرية في العراق في سنة 1776، وهو مصنوع من حجر البازلت الأسود الصلب، وموضوع على منصة منتصف منطقة مستطيلة الشكل طولها يزيد على عرضها بمقدار 2m ومساحتها $15\ m^2$. فما أبعادها؟



3 **الأسد:** وهو من أقوى الحيوانات الموجودة على وجه الأرض ويُلقّب الأسدُ بملِك الغابة نسبةً إلى قوّته بين الحيوانات في الغابة، إذا كانت المعادلة $x^2 - 30x$ تمثل المساحة التي يبسط الأسدُ سيطرتَه عليها بالكيلومتر. ماطول ضلع المنطقة التي يمثلها المتغير x إذا كانت المساحة 175 كيلومتر مربع؟



4 **ألعاب نارية:** في إحدى المناسبات أُطلِقت مجموعةٌ من الألعاب النارية عمودياً في الهواء وصلت إلى ارتفاع 200m. احسب الزمن الذي وصلت به إلى هذا الارتفاع، إذا كانت المعادلة الآتية $h = 30t + 2t^2$ تمثِّل العلاقة بين الارتفاع بالأمتار (h) الذي تصل إليه الألعاب النارية بعد t ثانية.

مراجعةُ الفصلِ Chapter Review

المفردات

English	عربي	English	عربي
coefficient	معامل	linear equation	معادلة خطية
absolute term	الحد المطلق	system of equations	نظام معادلات
absolute value	القيمة المطلقة	solution set	مجموعة الحل
general law	القانون العام	quadratic equation	معادلة تربيعية
discernment	المقدار المميز	factoring	تحليل
nominator	بسط الكسر	one variable	متغير واحد
dominator	مقام الكسر	probe and error factoring	التحليل بالتجربة
right side	الطرف الأيمن	the first term	الحد الأول
left side	الطرف الأيسر	the middle term	الحد الأوسط
rational equation	معادلة كسرية	the last term	الحد الأخير
plan	خطة	perfect square	مربع كامل
problem	مسألة	completing the square	إكمال مربع
linear equations system	أنظمة معادلات خطية	difference between two squares	فرق بين مربعين
		least common multiple	مضاعف مشترك أصغر

الدرسُ [3-1] حل نظام من معادلتين خطّيتين بمتغيرين

مثال: جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف لكل مما يأتي :

$x + 3y = 7$ .... (1)

$x - 3y = 1$ ... (2)

بجمع المعادلتين

$2x = 8 \Rightarrow x = 4$ نعوض x إحدى المعادلتين

$x + 3y = 7 \Rightarrow 4 + 3y = 7 \Rightarrow y = 1$

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(4 , 1)\}$

تدريب: جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف لكل مما يأتي :

$x + y = 2$ .... (1)

$x + 5y = 4$ ... (2)

....

....

الدرسُ [3-2] حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

مثال1: حل المعادلة التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

$25 - x^2 = 0$

$\Rightarrow (5+x)(5-x)=0 \Rightarrow 5 + x= 0$ or $5 - x=0$

$\Rightarrow x = -5$ or $x = 5$

$S = \{-5 , 5\}$ مجموعة الحل

تدريب1: حل المعادلة التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

$x^2 - 64 = 0$

....

....

مثال2: حل المعادلة التالية باستعمال خاصية الجذر التربيعي:

$y^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow y = \pm\frac{4}{5}$

$S = \{\frac{4}{5} , \frac{-4}{5}\}$ مجموعة الحل

تدريب2: حل المعادلة التالية باستعمال خاصية الجذر التربيعي :

$y^2 = 49$

....

....

الدرسُ [3-3] حل المعادلات التربيعية بالتجربة

مثال1: حل المعادلة التالية بالتحليل بالتجربة:

$x^2 - 2x - 15 = 0$

بما انّ إشارة الحد المطلق سالبة فإن إشارة القوسين مختلفة، وإشارة السالب للأكبر

$\Rightarrow (x - 5)(x + 3) = 0 \quad x = 5 \text{ or } x = -3$

$\Rightarrow S = \{5, -3\}$ مجموعة الحل

مثال2: حل المعادلة التالية بالتحليل بالتجربة:

$3y^2 - 11y + 10 = 0 \Rightarrow (3y - 5)(y - 2) = 0$

الحد الأوسط $-6y - 5y = -11y$

$\Rightarrow \begin{cases} 3y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{3} \\ \text{or } y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow S = \{\frac{5}{3}, 2\}$ مجموعة الحل

تدريب1: حل المعادلة التالية بالتحليل بالتجربة:

$x^2 - 10x + 21 = 0$

....
....
....

تدريب2: حل المعادلة التالية بالتحليل بالتجربة:

$4y^2 + 16y - 9 = 0$

....
....
....

الدرسُ [3-4] حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

مثال1: حل المعادلة التالية بالمربع الكامل:

$9x^2 - 36x + 36 = 0$

الحد الأوسط $2 \times (3x \times 6) = 36x$

$\Rightarrow (3x - 6)^2 = 0 \Rightarrow 3x - 6 = 0$

$\Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$ نأخذ أحد العوامل المتكررة

مثال2: حل المعادلة التالية بطريقة إكمال المربع:

$x^2 - 6x = 27$

إضافة المقدار $(\frac{1}{2} \times -6)^2 = 9$ إلى طرفي المعادلة

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 27 + 9$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 36 \Rightarrow (x - 3)^2 = 36$

نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$\Rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x - 3 = \pm 6$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 6 \Rightarrow x = 9 \\ \text{or } x - 3 = -6 \Rightarrow x = -3 \end{cases} \Rightarrow S = \{9, -3\}$

تدريب1: حل المعادلة التالية بالمربع الكامل:

$4x^2 - 28x + 49 = 0$

....
....

تدريب2: حل المعادلة التالية بطريقة إكمال المربع:

$x^2 - 12x = 28$

....
....
....
....
....

الدرسُ [3-5] حل المعادلات بالقانون العام

مثال1: جد مجموعة الحل للمعادلة باستعمال القانون العام:

$x^2 - 5x - 7 = 0 \quad , \; a = 1 \; , \; b = -5 \; , \; c = -7$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 28}}{2}$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{53}}{2} \Rightarrow x = \frac{5 + \sqrt{53}}{2} \text{ or } x = \frac{5 - \sqrt{53}}{2}$

$S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{53}}{2} , \frac{5 - \sqrt{53}}{2} \right\}$

مثال2: حدد جذور المعادلة:

$3x^2 + 5x - 2 = 0 \; , \; a = 3 , b = 5 , c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-2) = 49$

المقدار المميز مربع كامل أي للمعادلة جذران نسبيان

تدريب1: جد مجموعة الحل للمعادلة باستعمال القانون العام:

$x^2 - 3x - 8 = 0$

....

....

....

تدريب2: حدد جذور المعادلة:

$2x^2 - 7x - 3 = 0$

....

....

....

الدرسُ [3-6] حل المعادلات الكسرية

مثال: جد مجموعة الحل للمعادلة وتحقق من الحل:

نحلل المقامات

$\frac{x}{x - 1} + \frac{3x}{x + 1} = \frac{12}{x^2 - 1}$

$\Rightarrow \frac{x}{x - 1} + \frac{3x}{x + 1} = \frac{12}{(x - 1)(x + 1)}$

بضرب طرفي المعادلة في LCM $(x - 1)(x + 1)$

$\Rightarrow x(x + 1) + 3x(x - 1) = 12$

تبسيط المعادلة وحلها لإيجاد قيم المتغير

$\Rightarrow x^2 + x + 3x^2 - 3x - 12 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 2x - 12 = 0$

$\Rightarrow (4x + 6)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ or } x = 2$

التحقق: نعوض بالمعادلة الأصلية بإحدى القيم ونترك الثانية للطالب. نعوض $x = 2$ ونرى إن كان طرفا المعادلة متساويين أم لا؟

$L.S = \frac{2}{1} + \frac{6}{3} = 4$

$R.S = \frac{12}{3} = 4$

$L.S = R.S$

تدريب: جد مجموعة الحل للمعادلة وتحقق من الحل:

$\frac{2x}{x - 4} + \frac{x}{x + 4} = \frac{32}{x^2 - 16}$

....

....

....

....

....

التحقق:

....

....

....

اختبار الفصل

Chapter Test

جد مجموعة حل للمعادلتين بيانياً:

1 $\begin{cases} y = 1 + x \\ y = 2 - x \end{cases}$

2 $\begin{cases} y + x = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} y - x - 5 = 0 \\ y + x - 1 = 0 \end{cases}$

جد مجموعة الحل للمعادلتين باستعمال التعويض أو الحذف لكل مما يأتي:

4 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 8 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ x + y = 6 \end{cases}$

6 $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

حل المعادلات التالية باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين:

7 $9x^2 - 25 = 0$

8 $3y^2 - 12 = 0$

9 $(7 - z)^2 - 1 = 0$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

10 $x^2 = 49$

11 $81 - y^2 = 0$

12 $z^2 = \frac{36}{9}$

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

13 $x^2 + 9x + 18 = 0$

14 $z^2 - 2z - 48 = 0$

15 $3x^2 - x - 10 = 0$

16 $7z^2 - 18z - 9 = 0$

17 ما العدد الذي مربعه ينقص عن أربعة أمثاله بمقدار 3؟

18 حوض سباحة يزيد طوله على مثلَي عرضه بمقدار $4m$ ومساحته $48\ m^2$. ما أبعاد المسبح؟

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

19 $x^2 - 16x + 64 = 0$

20 $\frac{1}{9} - \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}z^2 = 0$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

21 $x^2 - 14x = 32$

22 $4y^2 + 20y - 11 = 0$

23 $z^2 - \frac{2}{3}z = 1$

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

24 $x^2 - 3x - 7 = 0$

25 $3y^2 - 12y = -3$

26 $5z^2 + 6z = 9$

حدد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

27 $2x^2 + 8x + 8 = 0$

28 $y^2 - 6y - 9 = 0$

29 $4z^2 - 3z + 7 = 0$

30 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذرَي المعادلة $x^2 - (k + 6)x + 9 = 0$ متساويين؟ تحقّق من الإجابة.

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

31 $\frac{6x}{5} = \frac{5}{6x}$

32 $\frac{1}{6y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y}$

33 $\frac{z + 4}{z^2} = \frac{1}{2}$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية:

34 $\frac{4}{x - 5} - \frac{3}{x - 2} = 1$

35 $\frac{2y}{y + 2} + \frac{y}{2 - y} = \frac{7}{y^2 - 4}$

تمرينات الفصول

الاختيار من متعدد Multiple choice

الفصل الأول

العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

Relations and Inequalities in Real Numbers

الفصل الثاني

المقادير الجبرية

Algebraic Expressions

الفصل الثالث

المعادلات

Equations

الدرس [1-1] ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية

Ordering Operations in Real Numbers

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

1. $(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7}) = ...$ a) $2+9\sqrt{7}$ b) $2+9\sqrt{2}$ c) $9+2\sqrt{14}$ d) $2+9\sqrt{14}$

2. $(\sqrt{18}-\sqrt{8})\left(\sqrt[3]{\frac{-27}{125}}\right) = ...$ a) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-3\sqrt{2}}{5}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{-2\sqrt{3}}{5}$

3. $\frac{6\sqrt{50}}{3\sqrt[3]{-8}} \div \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = ...$ a) $\frac{-5}{2}$ b) $\frac{-2}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

4. $\sqrt{8}(\sqrt{2}-\sqrt{3}) - 3\sqrt{6} = ...$ a) $5-4\sqrt{6}$ b) $5+4\sqrt{6}$ c) $4-5\sqrt{6}$ d) $4+5\sqrt{6}$

5. $(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{32}\right) = ...$ a) $\frac{-5}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

6. $\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = ...$ a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ c) 1 d) -1

7. $\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = ...$ a) $5+6\sqrt{2}$ b) $5-6\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{6}-5$ d) $2\sqrt{6}+5$

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة لكل مما يأتي:

8. $(\frac{1}{3})^2 - 3^{-2} - (5)^{\frac{3}{2}} \approx ...$ a) -18.11 b) 18.11 c) 11.18 d) -11.18

9. $8^{\frac{-1}{3}} - (-7)^0 + \frac{1}{6} \times 4^{\frac{1}{2}} \approx ....$ a) - 0.16 b) - 0.17 c) 0.16 d) 0.17

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

10. $(7.46 \times 10^{-2})^2 \approx ....$ a) 5.56×10^{-5} b) 5.57×10^{-4} c) 5.56×10^{-4} d) 5.57×10^{-5}

الدرس [2-1] التطبيقات

Mappings

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 إذا كان التطبيق $f: A \longrightarrow B$ معرف كالآتي $x \longrightarrow x + 1$:
$f: A \longrightarrow B$ حيث $A= \{1 , 3 , 5\}$ ، $B = \{2 , 4 , 6 , 8\}$. فإن مدى التطبيق هو:

a) $\{2 , 4 , 8\}$ b) $\{4 , 6 , 8\}$
c) $\{2 , 4 , 6\}$ d) $\{2 , 6 , 8\}$

2 إذا كانت $A= \{1 , 2 , -2 , -3\}$ وكان $g: A \longrightarrow Z$. فإن مدى التطبيق إذا كان $g(x) = 5x - 3$ هو:

a) $\{2 , 9 , 13 , 18\}$ b) $\{2 , 7 , -13 , -18\}$
c) $\{9 , 13 , 18 , 21\}$ d) $\{7 , 13 , 15 , 18\}$

3 إذا كانت $f: Z \longrightarrow R$ إذ $f(x) = 3x -2$. فإن العدد 10 هو صورة للعدد:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2

4 ليكن $f:A \longrightarrow B$ إذ $A= \{2 , 3 , 4 , 5\}$ ، $B = \{4 , 6 , 8\}$. وإن $f = \{(2 , 4), (3 , 6), (4 , 8), (5 , 8)\}$
فإن f يمثل تطبيقاً شاملاً لأن:

a) المدى ≠ المجال المقابل b) f تطبيق غير متباين
c) المدى هو مجموعة A d) المدى = المجال المقابل

5 إذا كانت $f: Z \longrightarrow Z$ إذ $f(x) = 2x - 3$ و $g:Z \longrightarrow Z$ إذ $g(x) = x + 1$. فإن التطبيق $(gof)(x)$ هو:

a) $2x - 2$ b) $2x - 4$ c) $2x + 2$ d) $2x + 4$

6 ليكن $f:\{2 , 3 , 5\} \longrightarrow N$ إذ $f(x)= 3x-1$ وإن $g:N \longrightarrow N$ إذ $g(x)= x+1$ فإن مدى gof هو المجموعة:

a) $\{5 , 8 , 14\}$ b) $\{5 , 6 , 9\}$
c) $\{6 , 12 , 15\}$ d) $\{6 , 9 , 15\}$

7 إذا كان التطبيق $f: Q \longrightarrow Q$ إذ $f(x) = 4x + 1$ والتطبيق $g: Q \longrightarrow Q$ إذ $g(x) = \frac{1}{3} x^2 - 1$.
جد قيمة x إذا كانت $(fog)(x) = 45$. فإن قيمة x هي:

a) ± 5 b) ± 6 c) ± 7 d) ± 8

الدرس [3-1] المتتابعات

The Sequences

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات التالية:

1. $\{5n - 2\} = \ldots$
   a) $\{2, 6, 12, 16, 20\}$ b) $\{3, 8, 13, 18, 23\}$
   c) $\{4, 8, 12, 18, 22\}$ d) $\{5, 10, 16, 20, 24\}$

2. $\{\frac{n}{2} + 1\} = \ldots..$
   a) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\}$ b) $\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\}$
   c) $\{\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\}$ d) $\{2, \frac{5}{2}, 3\ \frac{7}{2}, 4\}$

3. $\{(\frac{-1}{2+n})\} = \ldots\ldots$
   a) $\{\frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}\}$ b) $\{\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{7}\}$
   c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$ d) $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\}$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الحسابية التالية:

4. متتابعة حسابية الحد الثاني فيها 3 وأساسها 3 .
   a) $\{0,3,6,9,12\}$ b) $\{2,5,8, 11,14\}$ c) $\{3,6,9, 12,15\}$ d) $\{1,4,7,10,13\}$

5. متتابعة حسابية الحد الثالث فيها 8- وأساسها 2 .
   a) $\{-14,-12,-10,-8,-6\}$ b) $\{-12,-10,-8,-6,-4\}$ c) $\{-10,-8,-6,-4,-2\}$ d) $\{-8,-6,-4,-2,0\}$

6. جد الحد التاسع والحد الخامس عشر للمتتابعة الحسابية التي حدها الثاني 2 وأساسها 2 .
   a) $u_9 = 12\ ,\ u_{15} = 20$ b) $u_9 = 14\ ,\ u_{15} = 24$ c) $u_9 = 16\ ,\ u_{15} = 28$ d) $u_9 = 18\ ,\ u_{15} = 32$

7. جد الحدود بين u_2 و u_6 لمتتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{9}{5}$ وأساسها 2 .
   a) $\{\frac{9}{2}, \frac{19}{2}, \frac{29}{2}\}$ b) $\{\frac{19}{2}, \frac{29}{2}, \frac{39}{2}\}$ c) $\{\frac{9}{5}, \frac{19}{5}, \frac{29}{5}\}$ d) $\{\frac{19}{5}, \frac{29}{5}, \frac{39}{5}\}$

الدرس [1-4] المتباينات المركبة

Compound Inequalities

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً:

1. $-10 < x$ و $x \le -2$
   a) $\{x: -10 \le x\} \cap \{x: x \le -2\}$ b) $\{x: -10 < x\} \cap \{x: x \le -2\}$
   c) $\{x: -10 \le x\} \cup \{x: x \le -2\}$ d) $\{x: -10 < x\} \cup \{x: x \le -2\}$

2. $0 \le y - 3$ و $y - 3 < 12$
   a) $\{y: 3 < y < 15\}$ b) $\{y: -3 \le y \le 15\}$
   c) $\{y: 3 \le y < 15\}$ d) $\{y: -3 < y < 15\}$

3. $16 < 3z + 9$ و $3z + 9 < 30$
   a) $\{z: \frac{3}{7} \le z < 7\}$ b) $\{z: \frac{7}{3} < z \le 7\}$
   c) $\{z: \frac{3}{7} < z < 7\}$ d) $\{z: \frac{7}{3} < z < 7\}$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً:

4. $2t - 4 > -8$ أو $2t - 4 \le -12$
   a) $\{t: t > -2\} \cap \{t: t \le -4\}$ b) $\{t: t > -2\} \cup \{t: t \le -4\}$
   c) $\{t: t < -2\} \cap \{t: t \ge -4\}$ d) $\{t: t < -2\} \cup \{t: t \ge -4\}$

5. $\frac{y+5}{3} < \frac{1}{3}$ أو $\frac{y+5}{3} > \frac{7}{3}$
   a) $\{y: y < 4\} \cap \{y: y > 2\}$ b) $\{y: y > -4\} \cup \{y: y < 2\}$
   c) $\{y: y < -4\} \cap \{y: y > -2\}$ d) $\{y: y < -4\} \cup \{y: y > 2\}$

اكتب المتباينة المركبة التي تبيّن مدى طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولا الضلعين الآخرين للمثلث معلومين:

6. 5cm , 12cm
   a) $7 < z < 17$ b) $7 \le z < 17$ c) $7 \le z \le 17$ d) $7 < z \le 17$

7. 8cm , 2cm
   a) $6 \le x < 10$ b) $6 \le x \le 10$ c) $6 < x < 10$ d) $6 < x \le 10$

اكتب المتباينة التي مجموعة الحل لها على مستقيم الأعداد هي:

8. (number line from -7 to 7: closed dot at -4, open dot at 3, segment between shaded)
   -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
   a) $-4 < x < 3$ b) $-4 \le x < 3$ c) $-4 \le x \le 3$ d) $-4 < x \le 3$

9. (number line from -7 to 7: open dots at -3 and 5, rays shaded outward)
   -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
   a) $y \le -3$ أو $y > 5$ b) $y \le -3$ أو $y \ge 5$ c) $y < -4$ أو $y \ge 5$ d) $y < -3$ أو $y > 5$

الدرس [5-1] متباينات القيمة المطلقة

Absolute Value Inequalities

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية:

1. 4) $|y - 8| < 13$ a) $5 < y < -21$ b) $-5 \leq y \leq 21$ c) $-5 < y < 21$ d) $-5 < y \leq 21$

2. $|3z| - 7 < 1$ a) $-\frac{8}{3} \leq x < \frac{8}{3}$ b) $-\frac{8}{3} < x \leq \frac{8}{3}$ c) $-\frac{8}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}$ d) $-\frac{8}{3} < x < \frac{8}{3}$

3. $|3 - x| < 3$ a) $-6 < x < 0$ b) $0 < x < 6$ c) $-6 < x < 6$ d) $0 \leq x \leq 6$

4. $|5t - 5| > 0$
   a) $t \leq 1$ أو $t > 1$
   b) $t \geq 1$ أو $t < -1$
   c) $t > 1$ أو $t < 1$
   d) $t > -1$ أو $t < -1$

5. $|v - 3| \geq \frac{1}{2}$
   a) $v \leq \frac{7}{2}$ أو $v \leq \frac{-5}{2}$
   b) $v \geq \frac{7}{2}$ أو $v \geq \frac{-5}{2}$
   c) $v \geq \frac{7}{2}$ أو $v \leq \frac{5}{2}$
   d) $v \leq \frac{7}{2}$ أو $v \geq \frac{-5}{2}$

6. $|6 - 3y| \geq 9$
   a) $y \leq 1$ أو $y \geq -5$
   b) $y < -1$ أو $y > 5$
   c) $y > -1$ أو $y < 5$
   d) $y \leq -1$ أو $y \geq 5$

7. $|\frac{7 - 2y}{3}| \geq 3$
   a) $y \leq -1$ أو $y \geq 8$
   b) $y < -1$ أو $y \geq 8$
   c) $y < -1$ أو $y > 8$
   d) $y < -1$ أو $y > 8$

8. $|\frac{z - 1}{7}| \leq 2$
   a) $-13 < z \leq 15$
   b) $-13 \leq z < 15$
   c) $-13 \leq z \leq 15$
   d) $-13 < z < 15$

الدرس [1-2] ضرب المقادير الجبرية

Multiplying Algebraic Expressions

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر:

1. $(x+5)^2$ a) $x^2 - 10x + 25$ b) $x^2 + 10x + 25$ c) $x^2 + 5x + 25$ d) $x^2 - 5x + 25$

2. $(z-\sqrt{7})^2$ a) $z^2 - 7z + 49$ b) $z^2 + 7y + 49$ c) $z^2 - \sqrt{7}\,z + 7$ d) $z^2 - 2\sqrt{7}\,z + 7$

3. $(x+8)(x-8)$ a) $x^2 - 64$ b) $x^2 + 64$ c) $x^2 + 16$ d) $x^2 - 16$

4. $(3-2z)(3+2z)$ a) $6 - 4z^2$ b) $9 - 4z^2$ c) $6 + 4z^2$ d) $9 + 4z^2$

5. $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})$ a) $y^2 - \sqrt{12}$ b) $y^2 - 6$ c) $y^2 + \sqrt{12}$ d) $y^2 + 6$

6. $(2x-3)(x+9)$ a) $2x^2 + 15x - 27$ b) $2x^2 - 5x - 27$ c) $2x^2 - 15x + 27$ d) $2x^2 + 15x + 27$

7. $(y-2)(y^2+2y+4)$ a) $y^3 + 8$ b) $y^3 - 8$ c) $y^3 - 4$ d) $y^3 - 16$

8. $(\frac{1}{3} - x)(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x + x^2)$ a) $\frac{1}{27} - x^3$ b) $\frac{1}{27} + x^3$ c) $\frac{1}{9} + x^3$ d) $\frac{1}{9} - x^3$

9. $(z-2)^3$ a) $z^3 + 6z^2 + 12z + 8$ b) $z^3 - 6z^2 + 12z - 8$ c) $z^3 + 6z^2 - 12z - 8$ d) $z^3 - 6z^2 - 12z + 8$

10. $(y+\frac{1}{5})^3$ a) $y^3 - \frac{3}{3}y^2 + \frac{3}{25}y - \frac{1}{125}$ b) $y^3 + \frac{3}{5}y^2 - \frac{3}{25}y + \frac{1}{125}$ c) $y^3 + \frac{3}{5}y^2 + \frac{3}{25}y + \frac{1}{125}$ d) $y^3 - \frac{3}{5}y^2 - \frac{3}{25}y - \frac{1}{125}$

الدرس [2-2] تحليل المقدار الجبري بالعامل المشترك الأكبر

Using Greater Common Factor to factor Algebraic Expression

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF):

1. $12x^3 + 9x^2 - 3x$
   a) $3x(4x^2 + 3x + 1)$ b) $3x(4x^2 + 3x - 1)$
   c) $9x(3x^2 + x + 1)$ d) $9x(3x^2 + x - 1)$

2. $6y^2(3y - 4) + 36y$
   a) $6y(3y^2 + 4y + 6)$ b) $6y(3y^2 + 4y - 6)$
   c) $6y(3y^2 - 4y - 6)$ d) $6y(3y^2 - 4y + 6)$

حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

3. $3z(z - 3) - 7(z - 3)$
   a) $(z + 3)(3z - 7)$ b) $(z - 3)(3z + 7)$
   c) $(z - 3)(3z - 7)$ d) $(z + 3)(3z + 7)$

4. $\frac{1}{4}(x + 9) - \frac{1}{2}x^2(x + 9)$
   a) $(x + 9)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2)$ b) $(x - 9)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2)$
   c) $(x + 9)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^2)$ d) $(x + 9)(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)$

5. $\sqrt{2}\,v(x - 1) - \sqrt{3}\,t(x - 1)$
   a) $(x + 1)(\sqrt{2}\,v - \sqrt{3}\,t)$ b) $(x - 1)(\sqrt{2}\,v - \sqrt{3}\,t)$
   c) $(x - 1)(\sqrt{2}\,v + \sqrt{3}\,t)$ d) $(x + 1)(\sqrt{2}\,v + \sqrt{3}\,t)$

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

6. $3y^3 - 9y^2 + 5y - 15$
   a) $(y + 3)(3y^2 + 5)$ b) $(y + 3)(3y^2 - 5)$
   c) $(y - 3)(3y^2 + 5)$ d) $(y - 3)(3y^2 - 5)$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

7. $20y^3 - 4y^2 + 3 - 15y$
   a) $(5y + 1)(4y^2 - 3)$ b) $(5y - 1)(4y^2 + 3)$
   c) $(5y - 1)(4y^2 - 3)$ d) $(5y + 1)(4y^2 + 3)$

8. $\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 4 - 2x$
   a) $(x - 2)(\frac{1}{6}x^3 - 2)$ b) $(x + 2)(\frac{1}{6}x^3 - 2)$
   c) $(x + 2)(\frac{1}{6}x^3 - 2)$ d) $(x - 2)(\frac{1}{6}x^3 + 2)$

الدرس [2-3 تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات
Using Special Identities to factor Algebraic Expression

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل كل مقدار جبري من المقادير الجبرية الآتية:

1. $9-4x^2$
   a) $(3+2x)(3+2x)$ b) $(3+2x)(3-2x)$
   c) $(9-x)(9+4x)$ d) $(3+x)(3-4x)$

2. $12y^3z-3yz^3$
   a) $3y(2y-z)(y+2z)$ b) $3z(2y-z)(2y+z)$
   c) $3yz(2y-z)(2y+z)$ d) $3yz(y-2z)(y+2z)$

3. $\frac{1}{6}x^3 - x\frac{1}{24}$
   a) $\frac{x}{6}(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$ b) $\frac{x}{6}(x+\frac{1}{4})(x-\frac{1}{4})$
   c) $\frac{x}{3}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})$ d) $\frac{x}{6}(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4})(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4})$

4. $4x^2+24x+36$
   a) $(x+6)^2$ b) $(x-6)^2$ c) $4(x-3)^2$ d) $4(x+3)^2$

5. $16-8y+y^2$
   a) $(4+2y)^2$ b) $(4-2y)^2$ c) $(4-y)^2$ d) $(4+y)^2$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً:

6. $4x^2 - 20x + 25$
   a) $2(x)(5)=10x$ مربع كامل لأن b) $-2(2x)(5)=-20x$ مربع كامل لأن
   c) $-4(x)(5)\neq 10x$ مربع كامل لأن d) $-4(x)(5)\neq 20x$ ليس مربعاً كاملاً لأن

7. $64-48y+9y^2$
   a) $2(4)(3y)\neq -48y$ ليس مربعاً كاملاً لأن b) $2(8)(4y)=48y$ مربع كامل لأن
   c) $-2(8)(3y)=-48y$ مربع كامل لأن d) $-4(4)(3y)\neq 48y$ ليس مربعاً كاملاً لأن

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري ax^2+bx+c ليصبح مربعاً كاملاً:

8. $z^2+....+49$
   a) $14z$ b) $-10z$ c) $7z$ d) $-7z$

9. $36-24x+....$
   a) $2x^2$ b) $-2x^2$ c) $4x^2$ d) $-4x^2$

10. $16y^2+40y+...$
   a) 9 b) 25 c) -9 d) -25

الدرس [2-4] تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

Using Probe and Error to factor Algebraic Expression contains three terms

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

1. $x^2 + 7x + 12$
   a) $(x - 3)(x + 4)$ b) $(x + 3)(x + 4)$
   c) $(x - 1)(x + 7)$ d) $(x - 3)(x - 4)$

2. $x^2 - 5x - 36$
   a) $(x - 6)(x + 6)$ b) $(x + 12)(x - 3)$
   c) $(x - 9)(x + 4)$ d) $(x + 9)(x - 4)$

3. $y^2 + 4y - 21$
   a) $(y - 7)(y + 3)$ b) $(y + 7)(y - 3)$
   c) $(y - 7)(y - 3)$ d) $(y + 7)(y + 3)$

4. $4x^2 + 10x + 6$
   a) $(x - 6)(4x + 1)$ b) $(4x + 2)(x - 3)$
   c) $(4x - 6)(x - 1)$ d) $(2x + 3)(2x + 2)$

5. $24y^2 - 2y - 1$
   a) $(4y - 1)(6y + 1)$ b) $(2y - 1)(12y - 1)$
   c) $(4y + 1)(6y - 1)$ d) $(3y - 1)(8y + 1)$

6. $10x^2 - 11x + 1$
   a) $(5x - 1)(2x + 1)$ b) $(10x + 1)(x - 1)$
   c) $(5x + 1)(2x - 1)$ d) $(10x - 1)(x - 1)$

7. $22 + 3z - 4z^2$
   a) $(11 + 4z)(2 - z)$ b) $(22 - 4z)(1 + z)$
   c) $(11 - 4z)(2 + z)$ d) $(22 + 8z)(1 - z)$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

8. $x^2 + 15x + 26 = (x\ldots2)(x\ldots13)$
   a) $(x - 2)(x - 13)$ b) $(x - 2)(x + 13)$
   c) $(x + 2)(x + 13)$ d) $(x + 2)(x - 13)$

9. $4y^2 - 2y - 12 = (2y\ldots3)(2y\ldots4)$
   a) $(2y - 3)(2y + 4)$ b) $(2y + 3)(2y + 4)$
   c) $(2y - 3)(2y - 4)$ d) $(2y + 3)(2y - 4)$

10. $48 - 30z + 3z^2 = (6\ldots3z)(8\ldots z)$
   a) $(6 - 3z)(8 - z)$ b) $(6 + 3z)(8 + z)$
   a) $(6 - 3z)(8 + z)$ b) $(6 + 3z)(8 - z)$

الدرس [2-5] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو فرق بين مكعبين

Using the sum of two cubes or difference between two cubes to factor the Algebraic Expression

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

1 $8 + x^3$

a) $(2 - x)(4 + 2x + x^2)$ b) $(2 + x)(4 - 2x + x^2)$

c) $(2 - x)(4 - 2x + x^2)$ d) $(2 + x)(4 + 2x + x^2)$

2 $8y^3 + 27$

a) $(2y + 3)(4y^2 + 6y + 9)$ b) $(2y - 3)(4y^2 + 6y + 9)$

c) $(2y + 3)(4y^2 - 6y + 9)$ d) $(2y - 3)(4y^2 - 6y + 9)$

3 $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{64}$

a) $(\frac{1}{z} + \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$ b) $(\frac{1}{z} - \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

c) $(\frac{1}{z} - \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$ d) $(\frac{1}{z} + \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

4 $\frac{27}{125} + \frac{8}{x^3}$

a) $(\frac{3}{5} - \frac{2}{x})(\frac{9}{25} + \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$ b) $(\frac{3}{5} - \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$

c) $(\frac{3}{5} + \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$ d) $(\frac{3}{5} + \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} - \frac{4}{x^2})$

5 $0.027 + z^3$

a) $(0.03 + z)(0.09 - 0.3z + z^2$ b) $(0.03 + z)(0.009 - 0.03z + z^2)$

c) $(0.3 + z)(0.9 - 0.3z + z^2)$ d) $(0.3 + z)(0.09 - 0.3z + z^2)$

6 $\frac{8}{y^3} - \frac{1}{27}$

a) $(\frac{2}{y} - \frac{1}{3})(\frac{4}{y^2} - \frac{2}{3y} + \frac{1}{9})$ b) $(\frac{2}{y} + \frac{1}{3})(\frac{4}{y^2} - \frac{2}{3y} + \frac{1}{9})$

c) $(\frac{2}{y} - \frac{1}{3})(\frac{4}{y^2} + \frac{2}{3y} + \frac{1}{9})$ d) $(\frac{2}{y} - \frac{1}{3})(\frac{4}{y^2} + \frac{2}{3y} - \frac{1}{9})$

7 $9 - \frac{1}{3}z^3$

a) $\frac{1}{3}(3 - z)(9 + 3z - z^2)$ b) $\frac{1}{3}(3 - z)(9 + 3z + z^2)$

c) $\frac{1}{3}(3 + z)(9 + 3z + z^2)$ d) $\frac{1}{3}(3 - z)(9 - 3z + z^2)$

8 $0.008x^3 - 1$

a) $(0.02x - 1)(0.04x^2 + 0.002x + 1)$ b) $(0.02x - 1)(0.04x^2 + 0.02x + 1)$

c) $(0.2x + 1)(0.4x^2 - 0.2x + 1)$ d) $(0.2x - 1)(0.04x^2 + 0.2x + 1)$

الدرس [6-2] تبسيط المقادير الجبرية النسبية

Simplifying Rational Algebraic Expressions

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

اكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة:

1. $\frac{x+3}{4x} \times \frac{4x-12}{x^2-9}$ a) $\frac{3}{x}$ b) $\frac{x}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{x}$

2. $\frac{y+2}{y^2+2y+4} \times \frac{y^3-8}{y^2-4}$ a) $\frac{1}{y-2}$ b) 1 c) $\frac{1}{y+2}$ d) -1

3. $\frac{z^2-2z-15}{9+3z} \times \frac{5}{z^2-25}$ a) $\frac{5}{z+5}$ b) $\frac{3}{5(z+5)}$ c) $\frac{5}{3(z+5)}$ d) $\frac{3}{z+5}$

4. $\frac{x^2-49}{2x^2+9x-35} \div \frac{x-7}{4x^2-25}$ a) x -7 b) 2x - 5 c) x + 7 d) 2x + 5

5. $\frac{1-z^3}{1+z+z^2} \div \frac{(1-z)^2}{1-z^2}$ a) 1 - z b) 1 + z c) $1+z+z^2$ dc) $1-z+z^2$

اكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

6. $\frac{2y^2+1}{y^3-1} - \frac{y}{y^2+y+1}$ a) $\frac{y}{y+1}$ b) $\frac{1}{y+1}$ c) $\frac{1}{y-1}$ d) $\frac{y}{y-1}$

7. $\frac{5-4z^2}{8z^3+1} + \frac{2z-1}{4z^2-2z+1}$
 a) $\frac{2z-1}{(2z+1)(4z^2-2z+1)}$ b) $\frac{2z+1}{(2z+1)(4z^2-2z+1)}$
 c) $\frac{2}{(2z+1)(4z^2-2z+1)}$ d) $\frac{4}{(2z+1)(4z^2-2z+1)}$

8. $\frac{3}{x-5} - \frac{2}{5-x} - \frac{130+24x+5x^2}{x^3-125}$
 a) $\frac{2x}{(x^2+5x+25)}$ b) $\frac{-2x}{(x^2+5x+25)}$
 c) $\frac{1}{(x^2+5x+25)}$ d) $\frac{8}{x^2+5x+25}$

9. $\frac{3y+1}{y+4} - \frac{y-4}{3y-1} - \frac{10+8y^2}{3y^2+11y-4}$
 a) $\frac{5}{(y+4)(3y-1)}$ b) $\frac{3}{(y+4)(3y-1)}$
 c) $\frac{-3}{(y+4)(3y-1)}$ d) $\frac{-5}{(y+4)(3y-1)}$

الدرس [3-1] حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

Solving the system of two Linear Equations with two variables

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد مجموعة حل للنظام بيانياً:

1) $\left.\begin{array}{l} y = 4x - 6 \\ y = x \end{array}\right\}$ a) $\{(-2 , -2)\}$ b) $\{(-2 , 2)\}$ c) $\{(2 , -2)\}$ d) $\{(2 , 2)\}$

2) $\left.\begin{array}{l} y = x - 3 \\ y = 3 - x \end{array}\right\}$ a) $\{(-3 , 0)\}$ b) $\{(3, 0)\}$ c) $\{(0 , -3)\}$ d) $\{(0 , 3)\}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال التعويض لكل مما يأتي:

3) $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 26 \\ 5x - 2y = 0 \end{array}\right\}$ a) $\{(2 , 5)\}$ b) $\{(-2 , -5)\}$ c) $\{(2 , -5)\}$ d) $\{(-2 , 5)\}$

4) $\left.\begin{array}{l} y = 6x + 12 \\ 3y = 2x - 8 \end{array}\right\}$ a) $\{(\frac{-11}{4} , \frac{9}{2})\}$ b) $\{(\frac{11}{4} , \frac{-9}{2})\}$ c) $\{(\frac{-11}{4} , \frac{-9}{2})\}$ d) $\{(\frac{11}{4} , \frac{9}{2})\}$

5) $\left.\begin{array}{l} \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{y}{2} - \frac{x}{4} = 2 \end{array}\right\}$ a) $\{(12 , -10)\}$ b) $\{(-12, -10)\}$ c) $\{(12 , 10)\}$ d) $\{(-12 , 10)\}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف لكل مما يأتي:

6) $\left.\begin{array}{l} 7x - 4y = 12 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right\}$ a) $\{(-\frac{8}{5} , \frac{1}{5})\}$ b) $\{(-\frac{8}{5} , -\frac{1}{5})\}$ c) $\{(\frac{8}{5} , \frac{1}{5})\}$ d) $\{(\frac{8}{5} , -\frac{1}{5})\}$

7) $\left.\begin{array}{l} 6y - 2x - 8 = 0 \\ y + x - 12 = 0 \end{array}\right\}$ a) $\{(8 , -4)\}$ b) $\{(8, 4)\}$ c) $\{(-8 , 4)\}$ d) $\{(-8 ,-4)\}$

8) $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = 2\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 3\frac{1}{2} \end{array}\right\}$ a) $\{(-2 , -6)\}$ b) $\{(-2, 6)\}$ c) $\{(2 , -6)\}$ d) $\{(2 , 6)\}$

الدرس [2-3] حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

Solving Quadratic Equations with one variable

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين:

1. $3x^2 - 12x = 0$ a) $s = \{4, -4\}$ b) $s = \{3, -3\}$ c) $s = \{0, 4\}$ d) $s = \{0, 3\}$

2. $7z^2 - 21 = 0$ a) $s = \{7, -7\}$ b) $s = \{3, -3\}$ c) $s = \{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$ d) $s = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

3. $4(x^2 - 1) - 5 = 0$ a) $s = \{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$ b) $s = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ c) $s = \{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$ d) $s = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

4. $(y + 7)^2 - 81 = 0$ a) $s = \{2, -2\}$ b) $s = \{16, -16\}$ c) $s = \{2, -16\}$ d) $s = \{-2, 16\}$

5. $3x^2 - 6 = 0$ a) $s = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ b) $s = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ c) $s = \{6, -6\}$ d) $s = \{2, -2\}$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

6. $x^2 = 144$ a) $s = \{7, -7\}$ b) $s = \{14, -14\}$ c) $s = \{12, -12\}$ d) $s = \{12, 12\}$

7. $32 - 2y^2 = 0$ a) $s = \{6, 6\}$ b) $s = \{4, -4\}$ c) $s = \{6, -6\}$ d) $s = \{4, 4\}$

8. $5z^2 = 9$ a) $s = \{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\}$ b) $s = \{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\}$ c) $s = \{\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\}$ d) $s = \{\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\}$

9. $4(y^2 - 1) = 45$ a) $s = \{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\}$ b) $s = \{\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\}$ c) $s = \{\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}\}$ d) $s = \{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\}$

10. $\frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{9}$ a) $s = \{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$ b) $s = \{\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\}$ c) $s = \{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\}$ d) $s = \{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$

11. $x^2 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$ a) $s = \{\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\}$ b) $s = \{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\}$ c) $s = \{2, -2\}$ d) $s = \{1, -1\}$

الدرس [3-3] حل المعادلات التربيعية بطريقة التجربة

Using Probe and Error to solve the Quadratic Equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

1. $y^2 + 10y + 21 = 0$ a) $s = \{3,-7\}$ b) $s = \{-3,7\}$ c) $s = \{-3,-7\}$ d) $s = \{3,7\}$
2. $x^2 - 5x - 36 = 0$ a) $s = \{7, -8\}$ b) $s = \{-4,9\}$ c) $s = \{4,-9\}$ d) $s = \{-4,-9\}$
3. $x^2 - 8x - 48 = 0$ a) $s = \{4,12\}$ b) $s = \{4,-12\}$ c) $s = \{-4,12\}$ d) $s = \{-4,-12\}$
4. $4y^2 + 18y + 18 = 0$ a) $s = \{-3, \frac{3}{4}\}$ b) $s = \{3, \frac{3}{4}\}$ c) $s = \{3, \frac{3}{2}\}$ d) $s = \{-3, \frac{-3}{2}\}$
5. $6z^2 + 36z - 42 = 0$ a) $s = \{1, 7\}$ b) $s = \{-1,7\}$ c) $s = \{-1,-7\}$ d) $s = \{1,-7\}$
6. $22 - 20y - 2y^2 = 0$ a) $s = \{11,1\}$ b) $s = \{1,-11\}$ c) $s = \{11,-1\}$ d) $s = \{-1,-11\}$
7. $32 + 12x - 9x^2 = 0$ a) $s = \{\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\}$ b) $s = \{\frac{-4}{3}, \frac{-8}{4}\}$ c) $s = \{\frac{4}{3}, \frac{-8}{3}\}$ d) $s = \{\frac{-4}{3}, \frac{8}{3}\}$
8. ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 42 ؟

a) $s = \{7, 6\}$ b) $s = \{7, -6\}$ c) $s = \{-7, 6\}$ d) $s = \{-7, -6\}$

9. عددان حاصل ضربهما 54 ، أحدهما يزيد عن الآخر بمقدار 3 . فما العددان؟

a) $s = \{6, 9\}$ b) $s = \{6, -9\}$ c) $s = \{-6, 9\}$ d) $s = \{-6, -9\}$

10. عددان حاصل ضربهما 48 ، أحدهما يقل عن الآخر بمقدار 8 . فما العددان؟

a) $s = \{8, 6\}$ b) $s = \{12, -4\}$ c) $s = \{10, 4\}$ d) $s = \{-12, -4\}$

الدرس [3-4] حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

Using Completing the Square to solve the Quadratic Equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

1. $x^2 + 6x + 9 = 0$ a) $x = 6$ b) $x = -3$ c) $x = 4$ d) $x = 3$
2. $4z^2 - 20z + 25 = 0$ a) $z = \frac{-5}{2}$ b) $z = \frac{-2}{5}$ c) $z = \frac{5}{2}$ d) $z = \frac{2}{5}$
3. $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$ a) $y = \frac{1}{4}$ b) $y = \frac{-1}{4}$ c) $y = \frac{1}{2}$ d) $y = \frac{-1}{2}$
4. $y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$ a) $y = -3$ b) $y = 3$ c) $y = -\sqrt{3}$ d) $y = \sqrt{3}$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

5. $x^2 - 12x = 13$ a) $s = \{13, 1\}$ b) $s = \{13, -1\}$ c) $s = \{-13, 1\}$ d) $s = \{-13, -1\}$
6. $4y^2 - 32y = 17$ a) $s = \{\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\}$ b) $s = \{\frac{-1}{2}, \frac{2}{17}\}$ c) $s = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{17}\}$ d) $s = \{\frac{-1}{2}, \frac{17}{2}\}$
7. $16z^2 - 40z - 11 = 0$ a) $s = \{\frac{11}{4}, \frac{1}{4}\}$ b) $s = \{\frac{-11}{4}, \frac{-1}{4}\}$ c) $s = \{\frac{11}{4}, \frac{-1}{4}\}$ d) $s = \{\frac{-11}{4}, \frac{1}{4}\}$
8. $y^2 - \frac{1}{3}y = \frac{2}{9}$ a) $\{\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\}$, b) $\{\frac{-3}{2}, \frac{1}{3}\}$ c) $\{\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\}$, d) $\{\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\}$
9. $z^2 + 2\sqrt{5}z = 4$ a) $s = \{3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}\}$ b) $s = \{\sqrt{5} - 3, 3 - \sqrt{5}\}$ c) $s = \{3 - \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}\}$ d) $s = \{\sqrt{5} + 3, \sqrt{5} - 3\}$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:

10. $x^2 - 8x = 8$ a) $s \approx \{9, 1\}$ b) $s \approx \{9, -1\}$ c) $s \approx \{-9, 1\}$ d) $s \approx \{-9, -1\}$

الدرس [3-5] حل المعادلات بالقانون العام

Using General Law to solve the equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

1 $x^2 - 3x - 4 = 0$

a) $s = \{4, 1\}$ b) $s = \{4, -1\}$ c) $s = \{-4, 1\}$ d) $s = \{-4, -1\}$

2 $y^2 - 5y - 5 = 0$

a) $s = \{\frac{3+5\sqrt{5}}{2}, \frac{3-5\sqrt{5}}{2}\}$ b) $s = \{\frac{5+3\sqrt{5}}{4}, \frac{3-5\sqrt{5}}{4}\}$

c) $s = \{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}, \frac{5-3\sqrt{5}}{2}\}$ d) $s = \{\frac{5+3\sqrt{3}}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}}{2}\}$

3 $2x^2 - 8x = -3$

a) $s = \{\frac{4+\sqrt{10}}{2}, \frac{4-\sqrt{10}}{2}\}$ b) $s = \{\frac{2+\sqrt{10}}{2}, \frac{4+\sqrt{10}}{2}\}$

c) $s = \{\frac{4+\sqrt{5}}{4}, \frac{4-\sqrt{5}}{4}\}$ d) $s = \{\frac{2+\sqrt{5}}{2}, \frac{2-\sqrt{5}}{2}\}$

4 $3x^2 - 6(2x+1) = 0$

a) $s = \{2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\}$ b) $s = \{2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$

c) $s = \{2+\sqrt{6}, 2-\sqrt{6}\}$ d) $s = \{6+\sqrt{6}, 6-\sqrt{6}\}$

حدِّد جذور المعادلة باستعمال المميز:

5 $x^2 - 6x - 7 = 0$

a) جذران حقيقيان نسبيان b) جذران حقيقيان غير نسبيين

c) جذران حقيقيان متساويان $(\frac{-b}{2a})$ d) جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \varnothing$)

6 $2y^2 - 3y - 8 = 0$

a) جذران حقيقيان نسبيان b) جذران حقيقيان غير نسبيين

c) جذران حقيقيان متساويان $(\frac{-b}{2a})$ d) جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \varnothing$)

7 $8x^2 - 8x + 2 = 0$

a) جذران حقيقيان متساويان $(\frac{-b}{2a})$ b) جذران حقيقيان غير نسبيين

c) جذر حقيقي واحد $(\frac{-b}{2a})$ d) جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \varnothing$)

8 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $y^2 - (k+10)y + 16 = 0$ متساويين؟

a) $k = 2, -18$ b) $k = -2, -18$ c) $k = 6, 18$ d) $k = -6, -18$



الدرس [3-6] حل المعادلات الكسرية

Solving the Rational Equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية:

1. $\frac{2}{12x^2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4x}$ a) $s = \{2, \frac{1}{2}\}$ b) $s = \{-2, \frac{1}{2}\}$ c) $s = \{2, \frac{-1}{2}\}$ d) $s = \{-2, \frac{-1}{2}\}$

2. $\frac{5}{6} - \frac{7}{6y} + \frac{y}{3} = 0$ a) $s = \{1, \frac{-7}{2}\}$ b) $s = \{-1, \frac{-7}{2}\}$ c) $s = \{1, \frac{7}{2}\}$ d) $s = \{-1, \frac{7}{2}\}$

3. $\frac{8x}{5} = \frac{5}{8x}$ a) $s = \{\frac{5}{8}, \frac{-8}{5}\}$ b) $s = \{\frac{5}{8}, \frac{8}{5}\}$ c) $s = \{\frac{5}{8}, \frac{-5}{8}\}$ d) $s = \{\frac{8}{5}, \frac{-8}{5}\}$

4. $\frac{1+2y}{3y+9} = \frac{y}{2}$ a) $s = \{1, \frac{1}{3}\}$ b) $s = \{-1, \frac{1}{3}\}$ c) $s = \{2, \frac{1}{3}\}$ d) $s = \{-2, \frac{1}{3}\}$

5. $\frac{16x - 64}{x^2} = 1$ a) $x = -8$ b) $x = 8$ c) $x = -6$ d) $x = 6$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية:

6. $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-1} = 1$ a) $s = \{2+\sqrt{7}, 2-\sqrt{7}\}$ b) $s = \{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}$ c) $s = \{1+\sqrt{7}, 1-\sqrt{7}\}$ d) $s = \{2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\}$

7. $\frac{y-6}{y+6} - \frac{y+6}{y-6} = \frac{24y^2+6}{y^2-36}$ a) $y = -\frac{1}{3}$ b) $y = -\frac{1}{2}$ c) $y = \frac{1}{3}$ d) $y = -\frac{1}{3}$

8. $\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{x^2+12x+81}{x^2-9}$ a) $x = -9$ b) $x = 9$ c) $x = -8$ d) $x = 8$

9. $\frac{3y}{y-4} + \frac{y}{y-2} = \frac{5y^2-4y+8}{y^2-6y+8}$ a) $s = \{4,-2\}$ b) $s = \{-4,-2\}$ c) $s = \{-4,2\}$ d) $s = \{4,2\}$

المحتوى

الفصل الأول : العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

الفصل الثاني : المقادير الجبرية

الفصل الثالث : المعادلات

الخطة الدراسية لتوزيع الحصص

الفصل الأول	عدد الحصص
الاختبار القبلي	1
الدرس [1-1]	3
الدرس [1-2]	3
الدرس [1-3]	3
الدرس [1-4]	3
الدرس [1-5]	3
الدرس [1-6]	2
مراجعة الفصل	1
اختبار الفصل	1
المجموع	20

الفصل الثاني	عدد الحصص
الاختبار القبلي	1
الدرس [2-1]	3
الدرس [2-2]	3
الدرس [2-3]	3
الدرس [2-4]	3
الدرس [2-5]	3
الدرس [2-6]	3
الدرس [2-7]	2
مراجعة الفصل	1
اختبار الفصل	1
المجموع	23

الفصل الثالث	عدد الحصص
الاختبار القبلي	1
الدرس [3-1]	3
الدرس [3-2]	3
الدرس [3-3]	3
الدرس [3-4]	3
الدرس [3-5]	3
الدرس [3-6]	3
الدرس [3-7]	2
مراجعة الفصل	1
اختبار الفصل	1
المجموع	23